Fase aragonesa de la
LXII Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (9 de enero de 2026)

1. Consideramos la sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots$, donde $a_1 = 2026$, $a_1 + a_2 = 4a_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = 9a_3$ y, en general,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

¿Cuánto vale a_{2026}?, ¿y $a_{2^{2026}}$?

Solución: Para todo $n \geq 2$ se tiene

$$a_1 + \cdots + a_n = \begin{cases} n^2 a_n, \\ (a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + a_n, \end{cases}$$

luego se verifica $(n-1)^2 a_{n-1} = (n^2 - 1)a_n = (n-1)(n+1)a_n$ y, por tanto, $(n-1)a_{n-1} = (n+1)a_n$. Así pues, se tiene la relación

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}.$$

Reiterando este razonamiento tenemos

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)n} a_{n-2} = \cdots = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)n \cdots 4 \cdot 3} a_1,$$

que, simplificando factores comunes, nos queda

$$a_n = \frac{2}{(n+1)n} a_1.$$

En particular se tiene

$$a_{2026} = \frac{2}{2027 \cdot 2026} 2026 = \frac{2}{2027}, \quad a_{2^{2026}} = \frac{2}{(2^{2026}+1)2^{2026}} 2026 = \frac{1013}{(2^{2026}+1)2^{2024}}. \qquad \square$$

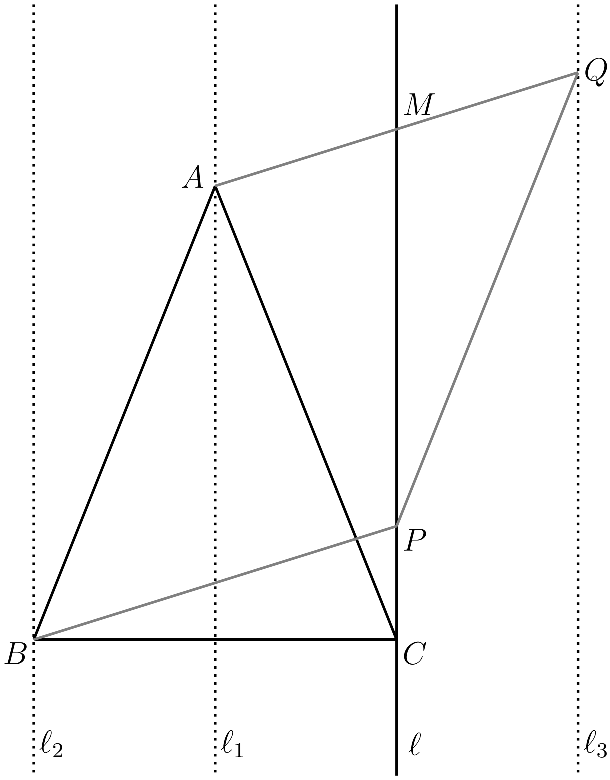
2. Sea ABC un triángulo isósceles en el plano, donde la longitud de AB es igual a la longitud de AC. Sea ℓ la recta perpendicular a BC por el punto C y sea P un punto de ℓ con estas condiciones:

- P no está en la recta que une A y B,
- A está más cerca de P que de C.

Sea Q el punto que hace que $ABPQ$ sea un paralelogramo y sea M el punto de corte de ℓ con la recta que une A y Q.

Prueba que M es el punto medio del segmento AQ.

Solución: Trazamos la altura ℓ_1 al triángulo por el vértice A, que es paralela a ℓ, y la paralela ℓ_2 a ℓ pasando por B. Por ser el triángulo isósceles, la distancia de ℓ_2 a ℓ_1 es igual a la distancia de ℓ_1 a ℓ:



Ahora trazamos otra recta ℓ_3 paralela a ℓ, a la misma distancia que ℓ_1 pero al otro lado (esto es, simétrica de ℓ_1 respecto a ℓ).

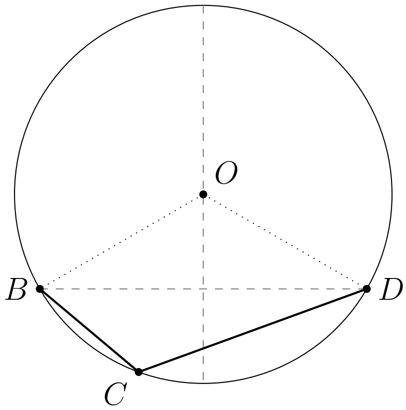
Por ser $ABPQ$ paralelogramo y ser la distancia de ℓ_2 a ℓ igual a la distancia de ℓ_1 a ℓ_3, se tiene que el punto Q está en ℓ_3; y por ser la distancia de ℓ_1 a ℓ la misma que la distancia de ℓ_3 a ℓ, se tiene que M es el punto medio del segmento AQ, como deseábamos. □

Fase aragonesa de la
LXII Olimpiada Matemática Española

Segunda etapa (16 de enero de 2026)

1. En el cuadrilátero $ABCD$ se sabe que $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$ y que $|AB| = |AD| = 1$. Determinar la longitud de la diagonal AC.

Solución: Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo BCD.

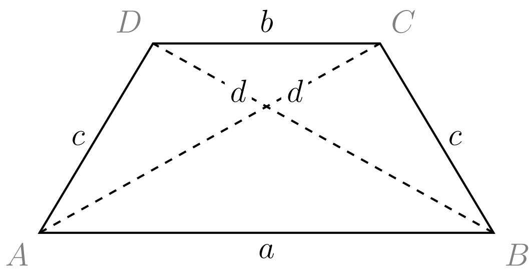


Al ser $\angle BCD = 130°$, se tiene $\angle BOD = 360° - 2 \cdot 130° = 100°$. Tanto O como A están en la mediatriz del segmento BD, y al ser $\angle BAD = \angle BOD$, se tiene que $A = O$, por lo que $|AC| = |AB| = |AD| = 1$. $\square$

2. Consideremos un trapecio isósceles y los seis segmentos correspondientes a sus cuatro lados y a sus dos diagonales. Tres de esos segmentos se pintan de rojo y los tres restantes se pintan de azul. Demostrar que siempre es posible escoger tres segmentos de un mismo color cuyas longitudes coincidan con las de los lados de algún triángulo.

Solución: Para que tres números reales positivos sean los lados de algún triángulo se tiene que verificar que cada uno de ellos sea menor que la suma de los otros dos.

Consideremos que AB y DC son las bases del trapecio, con $|AB| = a$ y $|DC| = b$ y de forma que $a > b$. Los lados laterales tienen la misma longitud: $|AD| = |BC| = c$, y lo mismo sucede con las dos diagonales, $|AC| = |BD| = d$:



Tenemos las siguientes desigualdades:

$$c < d < a + c, \quad b < d < b + c, \quad b < a < d + c.$$

Cuando ambas diagonales tienen el mismo color, uno de los lados del trapecio tiene también ese mismo color. En ese caso, se puede construir el triángulo con las dos diagonales y el lado que comparte color, ya que $c < d < d+d$, $a < d+c < d+d$ y $b < d+c < d+d$.

Supongamos ahora que las diagonales tienen colores diferentes. Si una de las bases y uno de los lados laterales tienen el mismo color, entonces forman un triángulo junto con la diagonal del mismo color, ya que las longitudes coinciden con las de los lados del triángulo ABC o ADC. Por lo tanto, el único caso que hay que considerar es aquel en el que las dos bases tienen un color y los dos lados laterales tienen otro.

Por lo tanto, tenemos que ver que, o bien los segmentos de longitudes (a, b, d) forman un triángulo, o que lo hacen (c, c, d). Si esto último falla, significa que se tiene $d \geq 2c$, pero entonces

$$\begin{aligned}
&b + d \geq b + c + c > d + c > a, \\
&a + d > b + d > b, \\
&a + b = a + b + c - c > a + d - c \geq a + c > d,
\end{aligned}$$

por lo que las longitudes (a, b, d) sí forman un triángulo. □

3. Determina los enteros positivos p para los que el polinomio

$$f(x) = 4x^2 + p$$

toma valores primos en todos los enteros $x = 0, 1, \ldots, p-1$.

Solución: Notemos que $f(0) = p$, luego p tiene que ser primo. Escribimos $f(x)$ de otra forma:

$$f(x) = 4x^2 - 1 + p + 1 = (2x+1)(2x-1) + (p+1).$$

Si $p+1$ tiene un factor primo impar, tenemos un $0 < x < p$ tal que $p + 1 = (2x+1)y$ para algún y. Por tanto se tiene que

$$f(x) = (2x+1)(2x-1) + (2x+1)y$$

no es primo, al ser múltiplo de $2x + 1$.

Basta pues considerar el caso en que $p + 1 = 2^n$ para algún $n \geq 2$. Escribimos $f(x)$ de otra forma:

$$f(x) = 4x^2 - 9 + p + 9 = (2x-3)(2x+3) + (p+9).$$

Si $n \geq 4$, entonces $p + 1$ es múltiplo de 16 y $p + 9 = (p+1) + 8$ es múltiplo de 8 pero no de 16, luego es 8 veces un número impar > 1. Así tenemos un $0 \leq x < p$ tal que $p + 9 = 8(2x+3)$ y, por tanto, se tiene que

$$f(x) = (2x-3)(2x+3) + (p+9) = (2x-3)(2x+3) + 8(2x+3)$$

no es primo, al ser múltiplo de $2x + 3$.

Así pues, basta estudiar los casos $p + 1 = 2^2 = 4$ y $p + 1 = 2^3 = 8$. Esto es, $p = 3$ y $p = 7$. Para $p = 3$ tenemos $f(0) = 3$, $f(1) = 4 + 3 = 7$, $f(2) = 4 \cdot 2^2 + 3 = 19$, luego se cumple la condición; y para $p = 7$ tenemos $f(0) = 7$, $f(1) = 11$, $f(2) = 4 \cdot 2^2 + 7 = 23$, $f(3) = 4 \cdot 3^2 + 7 = 43$, $f(4) = 4 \cdot 4^2 + 7 = 71$, $f(5) = 4 \cdot 5^2 + 7 = 107$, $f(6) = 4 \cdot 6^2 + 7 = 151$, que son todos primos, luego también se cumple la condición.

Los enteros solución son, pues, $p = 3$ y $p = 7$. □