Fase aragonesa de la
LXI Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (10 de enero de 2025)

1. Diremos que un número natural de 6 cifras (esto es, entre 100.000 y 999.999) es *majico* si el número formado por sus tres últimas cifras es uno más que el número formado por sus tres primeras cifras. Por ejemplo, 102.103 es majico.

Halla un número majico que sea también un cuadrado perfecto (esto es, que sea el cuadrado de algún número natural). Explica el proceso que sigues para hallarlo.

Solución: Sea a el número formado por las tres primeras cifras de un número majico. El número majico es entonces $n = 1000a + (a+1) = 1001a + 1$. Deseamos encontrar a de modo que se verifique $n = 1001a + 1 = b^2$ para algún número natural b (menor que 1000). Esto es,

$$1001a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1).$$

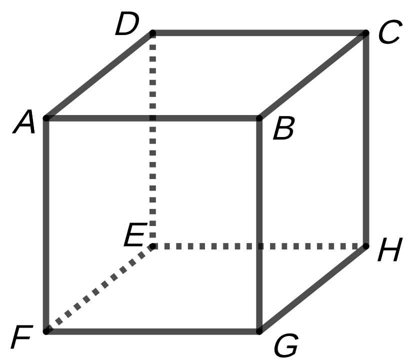
Como $1001 = 7 \times 11 \times 13$, los primos 7, 11 y 13 tienen que dividir a $b-1$ o a $b+1$.

Si, por ejemplo, 11 y 13 dividen a $b+1$ y 7 divide a $b-1$, se tiene $b = 143 \times m - 1$ para algún m y 7 divide a $b - 1 = 143 \times m - 2$. Como 140 es múltiplo de 7, esto significa que 7 divide a $3 \times m - 2$.

Podemos tomar $m = 3$, pues $3 \times 3 - 2 = 7$, obteniendo $b = 143 \times 3 - 1 = 428$ y $n = 428^2 = 183.184$, que es un número majico. $\square$

2. En el cubo de lado 1 metro de la derecha, con vértices A, B, C, D, E, F, G, H, considera los siguientes puntos:

- M el punto medio del segmento BC,
- N el punto medio del segmento EF,
- P el punto medio del segmento AB,
- Q el punto medio del segmento EH,
- X el punto de corte de los segmentos AM y CP,
- Y el punto de corte de los segmentos HN y FQ.

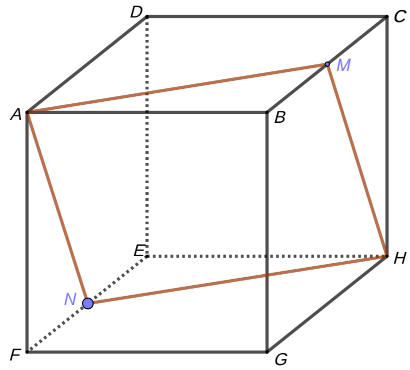


(a) Calcula el área del cuadrilátero $AMHN$.
(b) Calcula la longitud del segmento XY.

Solución:
(a) El cuadrilátero $AMHN$ tiene todos sus lados iguales, luego es un rombo.

Su diagonal mayor es el segmento AH que tiene longitud (Teorema de Pitágoras) $\sqrt{3}$ metros. Su diagonal menor es el segmento MN que tiene longitud $\sqrt{2}$ metros. Por tanto, el área es

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ metros cuadrados.}$$



(b) Fijémonos en la cara de arriba del cubo y denotemos por $\mathrm{d}(U, s)$ la distancia entre un punto U y un segmento s.

Como X está en el segmento AM, se tiene $\mathrm{d}(X, AD) = 2\,\mathrm{d}(X, AB)$. Además, por simetría, $\mathrm{d}(X, AB) = \mathrm{d}(X, BC)$, luego se tiene $\mathrm{d}(X, AD) = 2\,\mathrm{d}(X, BC)$ y, por tanto, $\mathrm{d}(X, BC) = \frac{1}{3}$.
Análogamente se tiene $\mathrm{d}(Y, EF) = \mathrm{d}(Y, EH) = \frac{1}{3}$.
Así pues, tenemos

$$\mathrm{d}(X, Y) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{11}}{3} \text{ metros.} \qquad \square$$