Fase aragonesa de la
LX Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (12 de enero de 2024)

1. Halla todas las ternas de números naturales (a, b, c) tales que:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2\,.$$

(Un número natural es un número entero mayor o igual que 1.)

Solución: Notemos primero que se tiene $a, b, c \geq 2$.

Podemos suponer $a \leq b \leq c$, luego se tiene

$$1+\frac{1}{a} \geq 1+\frac{1}{b} \geq 1+\frac{1}{c}$$

y, por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^3 \geq 2.$$

Pero si a es ≥ 4 se tiene

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^3 \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{68} < 2,$$

luego deducimos que a solo puede tomar los valores 2 y 3.

Si $a = 3$ tenemos

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2\times\frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Si b es ≥ 5, $\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \leq \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} < \frac{3}{2}$, luego b solo puede tomar los valores 3 y 4.

Si $a = 3 = b$, nos queda $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}$ y $c = 8$, mientras que si $a = 3$ y $b = 4$, nos queda $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ y $c = 5$.

Por último, si $a = 2$ tenemos

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

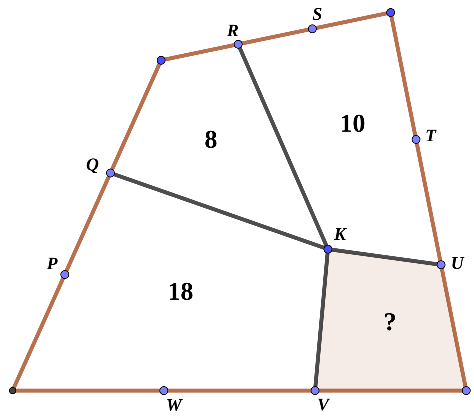
Si b es ≥ 7, $\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \leq \left(1+\frac{1}{7}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{49} < \frac{4}{3}$, luego se tiene $b \leq 6$. Además $1+\frac{1}{b} < \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = \frac{4}{3}$, luego también se tiene $b \geq 4$.

Se comprueba inmediatamente que

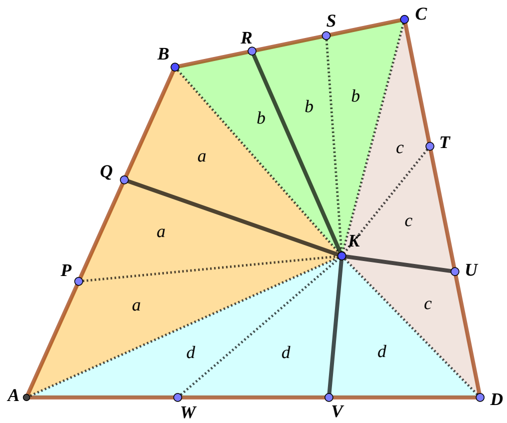
- si $a = 2$ y $b = 4$, $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{5} = \frac{16}{15}$ y $c = 15$,
- si $a = 2$ y $b = 5$, $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{5}{6} = \frac{10}{9}$ y $c = 9$,
- si $a = 2$ y $b = 6$, $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{6}{7} = \frac{8}{7}$, y $c = 7$.

Así pues, las ternas posibles son $(2, 4, 15)$, $(2, 5, 9)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 3, 8)$, $(3, 4, 5)$, y todas las que se obtienen por permutación de alguna de ellas.

2. El diagrama de la derecha muestra un cuadrilátero dividido en cuatro cuadriláteros más pequeños con un vértice común K. Los otros puntos en el diagrama dividen los lados del cuadrilátero grande en tres partes iguales. Los números indican las áreas de tres de los cuadriláteros pequeños. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



Solución: Los triángulos KAW, KWV y KVD tienen la misma base y altura, luego la misma área d. Lo mismo le ocurre a los triángulos KAP, KPQ y KQB, cuya área denotamos por a, ...



Los datos que tenemos son:

$$2(b+c) = 10, \quad a+b = 8, \quad 2(a+d) = 18,$$

esto es,

$$b+c = 5, \quad a+b = 8, \quad a+d = 9,$$

y el área que se pide es

$$c+d = (a+d)+(b+c)-(a+b) = 9+5-8 = \mathbf{6}.$$

LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase aragonesa, curso 2023 - 2024

Enunciados y soluciones

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots 11$$

sea divisible por 55.

Solución. Para que $A(n)$ sea múltiplo de 55 ha de ser múltiplo de 5 y de 11.
Para que sea múltiplo de 5, la última cifra debe de ser 0 o 5, con lo que n tiene que ser múltiplo de 5.
Notemos que $11\ldots 11$ (n 1's) es múltiplo de 11 si n es par, y es un múltiplo de 11 más 1 si n es impar. Por tanto,

$$A(n) = (\text{múltiplo de } 11) + \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

por lo que $A(n)$ es múltiplo de 11 si o bien n es par y múltiplo de 11, o bien n es impar y $n+1$ es múltiplo de 11. Los primeros n's para los que $A(n)$ es múltiplo de 11 son 21, 22, 43, 44, 65, 66, ...
El primero de estos que también es múltiplo de 5 es 65; que es la solución al problema.

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Solución. Como $AD = BC$, tenemos que $ABCD$ es un trapecio isósceles. Sea M el punto medio de AB. Por lo tanto, los triángulos ADM, DMC y MCB son equiláteros de lado 5; eso se observa viendo que la altura del trapecio es $h = \sqrt{5^2 - (5/2)^2}$, y por lo tanto $DM^2 = h^2 + (5/2)^2 = 5^2$. Como ADC es isósceles y $\angle ADC = 120°$ por ser suma de dos ángulos de $60°$, tenemos que $AMCD$ es un rombo y las dos diagonales son bisectrices de $\angle DAB$ y $\angle ABC$. Entonces, $\angle AFO = 60°$, ya que $\angle AOF = 90°$ y $\angle FAO = 30°$; y por el mismo motivo, $\angle AEO = 60°$. Por lo tanto, AEF es equilátero y O es el punto medio de EF ya que AO es la altura y por lo tanto también es la mediana.
Podemos calcular la longitud de AF usando que $AC = BD = 5\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras en ABC). Además, por el teorema de la bisectriz en ABC, tenemos que $AO = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, como conocemos la altura del triángulo equilátero AEF, tenemos automáticamente que la medida del lado, que es $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$. Entonces, $AE = AF = EF = \frac{20}{3}$. Finalmente, observamos que $AECF$ es un cuadrilátero con las diagonales perpendiculares cuya área es $\frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
- X e Y son amigos.

Solución. Sea n el máximo número de enemigos que tiene una persona. Si $n = 0$ todos son amigos y podemos tomar cualquier par X e Y. Si $n = 1$, los enemigos vienen en parejas y podemos tomar X e Y cualesquiera dos personas sin enemigos o, si esto no es posible, cualquier par de personas con un enemigo que no sea enemigos entre sí.
Supongamos pues $n \geq 2$. Sea U una persona con n enemigos y sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sus enemigos, ordenados por número de enemigos (V_1 es el que tiene menos enemigos y V_n el que tiene más). Notemos que todos los V_i's son necesariamente amigos.
Si hay algún empate, esto es, si existe un i tal que el número de enemigos de V_i y V_{i+1} es el mismo, podemos tomar $X = V_i$ e $Y = V_{i+1}$. En otro caso, y puesto que el número de enemigos de V_n es $\leq n$ (pues n es el máximo), necesariamente se tiene que el número de enemigos de V_i es i para todo $i = 1, \ldots, n$.
Sean ahora $W_1, W_2, \ldots, W_n$ los enemigos de V_n, ordenados de nuevo por número de enemigos. Como antes, si hay algún empate se tiene la solución. Y si no hay empate, el único enemigo de V_1 es U y el único enemigo de W_1 es V_n, por tanto $X = V_1$ e $Y = W_1$ son amigos y tienen el mismo número de enemigos.