LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase aragonesa, curso 2023 - 2024

Enunciados y soluciones

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots11$$

sea divisible por 55.

Solución. Para que $A(n)$ sea múltiplo de 55 ha de ser múltiplo de 5 y de 11.
Para que sea múltiplo de 5, la última cifra debe de ser 0 o 5, con lo que n tiene que ser múltiplo de 5.
Notemos que $11\ldots11$ (n 1's) es múltiplo de 11 si n es par, y es un múltiplo de 11 más 1 si n es impar. Por tanto,

$$A(n) = (\text{múltiplo de } 11) + \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

por lo que $A(n)$ es múltiplo de 11 si o bien n es par y múltiplo de 11, o bien n es impar y $n+1$ es múltiplo de 11. Los primeros n's para los que $A(n)$ es múltiplo de 11 son 21, 22, 43, 44, 65, 66, ...
El primero de estos que también es múltiplo de 5 es 65; que es la solución al problema.

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Solución. Como $AD = BC$, tenemos que $ABCD$ es un trapecio isósceles. Sea M el punto medio de AB. Por lo tanto, los triángulos ADM, DMC y MCB son equiláteros de lado 5; eso se observa viendo que la altura del trapecio es $h = \sqrt{5^2 - (5/2)^2}$, y por lo tanto $DM^2 = h^2 + (5/2)^2 = 5^2$. Como ADC es isósceles y $\angle ADC = 120°$ por ser suma de dos ángulos de $60°$, tenemos que $AMCD$ es un rombo y las dos diagonales son bisectrices de $\angle DAB$ y $\angle ABC$. Entonces, $\angle AFO = 60°$, ya que $\angle AOF = 90°$ y $\angle FAO = 30°$; y por el mismo motivo, $\angle AEO = 60°$. Por lo tanto, AEF es equilátero y O es el punto medio de EF ya que AO es la altura y por lo tanto también es la mediana.
Podemos calcular la longitud de AF usando que $AC = BD = 5\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras en ABC). Además, por el teorema de la bisectriz en ABC, tenemos que $AO = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, como conocemos la altura del triángulo equilátero AEF, tenemos automáticamente que la medida del lado, que es $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$. Entonces, $AE = AF = EF = \frac{20}{3}$. Finalmente, observamos que $AECF$ es un cuadrilátero con las diagonales perpendiculares cuya área es $\frac{AC \cdot EF}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
- X e Y son amigos.

Solución. Sea n el máximo número de enemigos que tiene una persona. Si $n = 0$ todos son amigos y podemos tomar cualquier par X e Y. Si $n = 1$, los enemigos vienen en parejas y podemos tomar X e Y cualesquiera dos personas sin enemigos o, si esto no es posible, cualquier par de personas con un enemigo que no sea enemigos entre sí.
Supongamos pues $n \geq 2$. Sea U una persona con n enemigos y sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sus enemigos, ordenados por número de enemigos (V_1 es el que tiene menos enemigos y V_n el que tiene más). Notemos que todos los V_i's son necesariamente amigos.
Si hay algún empate, esto es, si existe un i tal que el número de enemigos de V_i y V_{i+1} es el mismo, podemos tomar $X = V_i$ e $Y = V_{i+1}$. En otro caso, y puesto que el número de enemigos de V_n es $\leq n$ (pues n es el máximo), necesariamente se tiene que el número de enemigos de V_i es i para todo $i = 1, \ldots, n$.
Sean ahora $W_1, W_2, \ldots, W_n$ los enemigos de V_n, ordenados de nuevo por número de enemigos. Como antes, si hay algún empate se tiene la solución. Y si no hay empate, el único enemigo de V_1 es U y el único enemigo de W_1 es V_n, por tanto $X = V_1$ e $Y = W_1$ son amigos y tienen el mismo número de enemigos.