Fase aragonesa de la
LX Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (12 de enero de 2024)

1. Halla todas las ternas de números naturales (a, b, c) tales que:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2\,.$$

(Un número natural es un número entero mayor o igual que 1.)

Solución: Notemos primero que se tiene $a, b, c \geq 2$.

Podemos suponer $a \leq b \leq c$, luego se tiene

$$1+\frac{1}{a} \geq 1+\frac{1}{b} \geq 1+\frac{1}{c}$$

y, por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^3 \geq 2.$$

Pero si a es ≥ 4 se tiene

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^3 \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{68} < 2,$$

luego deducimos que a solo puede tomar los valores 2 y 3.

Si $a = 3$ tenemos

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Si b es ≥ 5, $\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \leq \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} < \frac{3}{2}$, luego b solo puede tomar los valores 3 y 4.

Si $a = 3 = b$, nos queda $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{8}$ y $c = 8$, mientras que si $a = 3$ y $b = 4$, nos queda $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ y $c = 5$.

Por último, si $a = 2$ tenemos

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

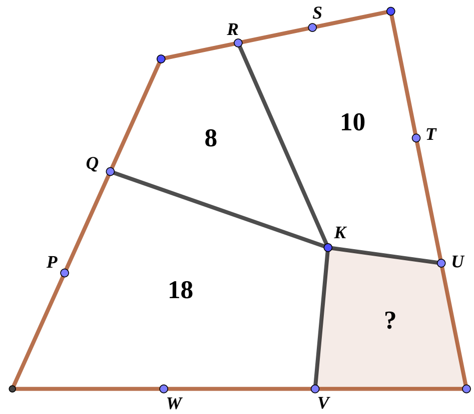
Si b es ≥ 7, $\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \leq \left(1+\frac{1}{7}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{49} < \frac{4}{3}$, luego se tiene $b \leq 6$. Además $1+\frac{1}{b} < \left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = \frac{4}{3}$, luego también se tiene $b \geq 4$.

Se comprueba inmediatamente que

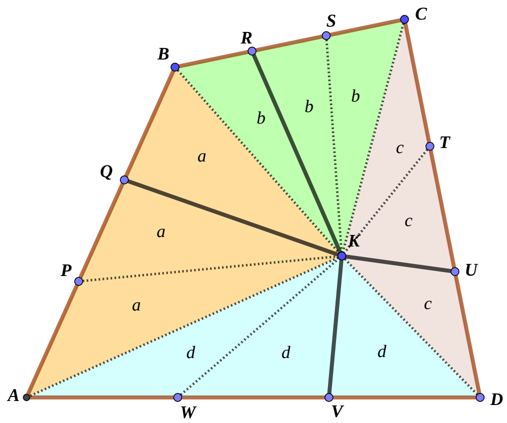
- si $a = 2$ y $b = 4$, $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{5} = \frac{16}{15}$ y $c = 15$,
- si $a = 2$ y $b = 5$, $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{5}{6} = \frac{10}{9}$ y $c = 9$,
- si $a = 2$ y $b = 6$, $\frac{c+1}{c} = 1+\frac{1}{c} = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{6}{7} = \frac{8}{7}$, y $c = 7$.

Así pues, las ternas posibles son $(2, 4, 15)$, $(2, 5, 9)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 3, 8)$, $(3, 4, 5)$, y todas las que se obtienen por permutación de alguna de ellas.

2. El diagrama de la derecha muestra un cuadrilátero dividido en cuatro cuadriláteros más pequeños con un vértice común K. Los otros puntos en el diagrama dividen los lados del cuadrilátero grande en tres partes iguales. Los números indican las áreas de tres de los cuadriláteros pequeños. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



Solución: Los triángulos KAW, KWV y KVD tienen la misma base y altura, luego la misma área d. Lo mismo le ocurre a los triángulos KAP, KPQ y KQB, cuya área denotamos por a, ...



Los datos que tenemos son:

$$2(b+c) = 10, \quad a+b = 8, \quad 2(a+d) = 18,$$

esto es,

$$b+c = 5, \quad a+b = 8, \quad a+d = 9,$$

y el área que se pide es

$$c+d = (a+d)+(b+c)-(a+b) = 9+5-8 = \mathbf{6}.$$