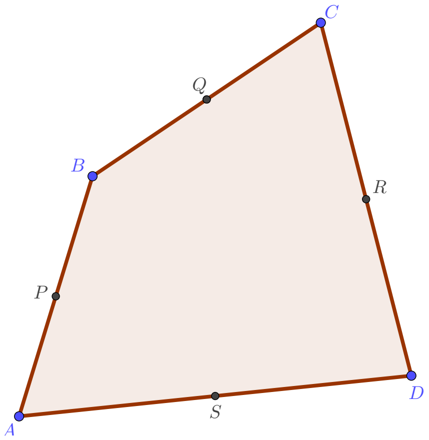
Fase aragonesa de la
LIX Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (13 de enero de 2023)



1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y sean P, Q, R, S los puntos medios de cada uno de sus lados.
Prueba que si el área del cuadrilátero $PQRS$ es de 1 metro cuadrado, entonces el área de $ABCD$ es de 2 metros cuadrados.

Los triángulos ABD y APS son semejantes, y la razón entre sus lados es 2, luego el área de APS es un cuarto del área de ABD (tanto la base como la altura de APS son la mitad que la base y la altura de ABD). Análogamente, el área de CQR es un cuarto del área de CBD y, por tanto, la suma de las áreas de APS y CQR es un cuarto del área del cuadrilátero $ABCD$.

Del mismo modo, la suma de las áreas de BPQ y DSR es un cuarto del área del cuadrilátero $ABCD$. Por tanto la suma de las áreas de los cuatro triángulos APS, CQR, BPQ y DSR es la mitad del área de $ABCD$, y de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \text{área}\, PQRS &= \text{área}\, ABCD - \big(\text{área}\, APS + \text{área}\, CQR + \text{área}\, BPQ + \text{área}\, DSR\big) \\ &= \frac{1}{2}\, \text{área}\, ABCD\,. \end{aligned}$$

Si el área del cuadrilátero $PQRS$ vale 1, se concluye que el área del cuadrilátero $ABCD$ es 2.

2. Tenemos números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2023}$ que verifican las siguientes propiedades:

$$a_1 = 2023, \quad a_1 + a_2 = 2^2 a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 3^2 a_3, \quad \ldots$$

y, en general,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$$

para todo $n > 2$.
Da el valor exacto de a_{2023}.

Notemos la siguiente relación, válida para todo $n > 1$:

$$a_1 + \cdots + a_n = \begin{cases} n^2 a_n, \\ (a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + a_n. \end{cases}$$

Concluimos que $n^2 a_n = a_n + (n-1)^2 a_{n-1}$ o, equivalentemente, $(n^2-1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$. Dividiendo por $n-1$ obtenemos:

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} \quad \text{o} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Así, por ejemplo

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot a_1 = \frac{2}{7 \cdot 6} \cdot a_1 = \frac{2023}{21}. \end{aligned}$$

El cálculo de a_{2023} es análogo, solo que con más términos:

$$\begin{aligned} a_{2023} &= \frac{a_{2023}}{a_{2022}} \cdot \frac{a_{2022}}{a_{2021}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{2022 \cdot 2021 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{2024 \cdot 2023 \cdot \cdots \cdot 3} \cdot a_1 \\ &= \frac{2}{2024 \cdot 2023} \cdot 2023 = \frac{2}{2024} = \frac{1}{1012}. \end{aligned}$$

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Tarde del viernes 20 de enero de 2023

Problema 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Problema 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Enunciados y soluciones

Problema 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Solución. Demostraremos que $\angle GHI = \angle GFE$, que es suficiente para concluir. Comenzamos observando que

$$\angle GFE = \angle GAE = \angle GCI,$$

donde la primera igualdad de sigue del hecho que $AFGE$ es un cuadrilátero cíclico y la segunda del paralelismo de AE y CI. Si demostramos que $GHCI$ es cíclico, tendremos automáticamente que $\angle GCI = \angle GHI$. Ahora bien, esto es consecuencia de las igualdades

$$\angle HGI = \angle EGF = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD,$$

que son automáticas dado que $AFGE$ es cíclico y $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Solución. Si $z = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, entonces

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} = \frac{1}{z} - 1.$$

Si A es el conjunto de números en la pizarra, entonces la cantidad

$$\prod_{x \in A} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

no cambia durante todo el proceso (es un invariante). Inicialmente, este valor es 2022!. Por tanto, si al final del proceso únicamente queda el número x en la pizarra, entonces $\dfrac{1}{x} = 2022! + 1$, y por tanto $x = \dfrac{1}{2022! + 1}$.

Problema 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Solución. Vamos a demostrar que las únicas soluciones son las ternas $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$. Distinguiremos tres casos según el valor de a.

- Si $a = 1$, la ecuación se puede escribir como $7^b = c^2 + 2$. Observemos que si b es par, el lado izquierdo siempre es un múltiplo de 8 más uno, esto es,

  $$7^{2k} = 49^k \equiv 1^k = 1 \pmod{8},$$

  donde se ha usado que $49 \equiv 1 \pmod{8}$; si k es impar, el lado izquierdo es un múltiplo de 8 más siete, es decir,

  $$7^{2k+1} = 7^{2k} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{8}.$$

  Por tanto, los restos posibles del lado izquierdo módulo 8 son 1 y 7. En lo que se refiere al lado derecho, si c es impar, el resto al dividir por 8 es 3; y si es par puede ser 2 o 6. En cualquier caso, nunca es posible que se dé la igualdad.

- Si $a = 2$, la ecuación se reescribe como $7^b = c^2$. De aquí tenemos que $c = 7^t$, y sustituyendo nos queda que $b = 2t$. Por tanto, las ternas de la forma $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$ son solución, y son las únicas con $a = 2$.

- Si $a \geq 3$, la ecuación se reescribe módulo 8 como

  $$7^b \equiv c^2 + 4 \pmod{8}.$$

  El lado izquierdo da como resto 1 o 7, mientras que el derecho puede ser 5, 4 o 0. Por tanto, nunca hay igualdad.