LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Tarde del viernes 20 de enero de 2023

Problema 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Problema 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Enunciados y soluciones

Problema 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Solución. Demostraremos que $\angle GHI = \angle GFE$, que es suficiente para concluir. Comenzamos observando que

$$\angle GFE = \angle GAE = \angle GCI,$$

donde la primera igualdad de sigue del hecho que $AFGE$ es un cuadrilátero cíclico y la segunda del paralelismo de AE y CI. Si demostramos que $GHCI$ es cíclico, tendremos automáticamente que $\angle GCI = \angle GHI$. Ahora bien, esto es consecuencia de las igualdades

$$\angle HGI = \angle EGF = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD,$$

que son automáticas dado que $AFGE$ es cíclico y $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Solución. Si $z = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, entonces

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} = \frac{1}{z} - 1.$$

Si A es el conjunto de números en la pizarra, entonces la cantidad

$$\prod_{x \in A} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

no cambia durante todo el proceso (es un invariante). Inicialmente, este valor es 2022!. Por tanto, si al final del proceso únicamente queda el número x en la pizarra, entonces $\dfrac{1}{x} = 2022! + 1$, y por tanto $x = \dfrac{1}{2022! + 1}$.

Problema 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Solución. Vamos a demostrar que las únicas soluciones son las ternas $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$. Distinguiremos tres casos según el valor de a.

- Si $a = 1$, la ecuación se puede escribir como $7^b = c^2 + 2$. Observemos que si b es par, el lado izquierdo siempre es un múltiplo de 8 más uno, esto es,

  $$7^{2k} = 49^k \equiv 1^k = 1 \pmod{8},$$

  donde se ha usado que $49 \equiv 1 \pmod{8}$; si k es impar, el lado izquierdo es un múltiplo de 8 más siete, es decir,

  $$7^{2k+1} = 7^{2k} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{8}.$$

  Por tanto, los restos posibles del lado izquierdo módulo 8 son 1 y 7. En lo que se refiere al lado derecho, si c es impar, el resto al dividir por 8 es 3; y si es par puede ser 2 o 6. En cualquier caso, nunca es posible que se dé la igualdad.

- Si $a = 2$, la ecuación se reescribe como $7^b = c^2$. De aquí tenemos que $c = 7^t$, y sustituyendo nos queda que $b = 2t$. Por tanto, las ternas de la forma $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$ son solución, y son las únicas con $a = 2$.

- Si $a \geq 3$, la ecuación se reescribe módulo 8 como

  $$7^b \equiv c^2 + 4 \pmod{8}.$$

  El lado izquierdo da como resto 1 o 7, mientras que el derecho puede ser 5, 4 o 0. Por tanto, nunca hay igualdad.