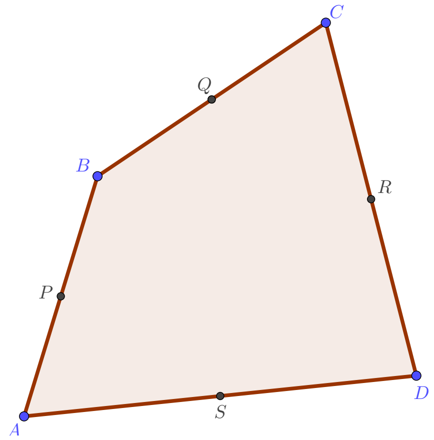
Fase aragonesa de la
LIX Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (13 de enero de 2023)



1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y sean P, Q, R, S los puntos medios de cada uno de sus lados.
Prueba que si el área del cuadrilátero $PQRS$ es de 1 metro cuadrado, entonces el área de $ABCD$ es de 2 metros cuadrados.

Los triángulos ABD y APS son semejantes, y la razón entre sus lados es 2, luego el área de APS es un cuarto del área de ABD (tanto la base como la altura de APS son la mitad que la base y la altura de ABD). Análogamente, el área de CQR es un cuarto del área de CBD y, por tanto, la suma de las áreas de APS y CQR es un cuarto del área del cuadrilátero $ABCD$.

Del mismo modo, la suma de las áreas de BPQ y DSR es un cuarto del área del cuadrilátero $ABCD$. Por tanto la suma de las áreas de los cuatro triángulos APS, CQR, BPQ y DSR es la mitad del área de $ABCD$, y de aquí obtenemos

$$\begin{aligned}\text{área}\, PQRS &= \text{área}\, ABCD - \big(\text{área}\, APS + \text{área}\, CQR + \text{área}\, BPQ + \text{área}\, DSR\big)\\ &= \frac{1}{2}\,\text{área}\, ABCD\,.\end{aligned}$$

Si el área del cuadrilátero $PQRS$ vale 1, se concluye que el área del cuadrilátero $ABCD$ es 2.

2. Tenemos números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2023}$ que verifican las siguientes propiedades:

$$a_1 = 2023, \quad a_1 + a_2 = 2^2 a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 3^2 a_3, \quad \ldots$$

y, en general,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$$

para todo $n > 2$.
Da el valor exacto de a_{2023}.

Notemos la siguiente relación, válida para todo $n > 1$:

$$a_1 + \cdots + a_n = \begin{cases} n^2 a_n, \\ (a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = (n-1)^2 a_{n-1} + a_n. \end{cases}$$

Concluimos que $n^2 a_n = a_n + (n-1)^2 a_{n-1}$ o, equivalentemente, $(n^2-1)a_n = (n-1)^2 a_{n-1}$. Dividiendo por $n-1$ obtenemos:

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} \quad \text{o} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Así, por ejemplo

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot a_1 = \frac{2}{7 \cdot 6} \cdot a_1 = \frac{2023}{21}. \end{aligned}$$

El cálculo de a_{2023} es análogo, solo que con más términos:

$$\begin{aligned} a_{2023} &= \frac{a_{2023}}{a_{2022}} \cdot \frac{a_{2022}}{a_{2021}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{2022 \cdot 2021 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}{2024 \cdot 2023 \cdot \cdots \cdot 3} \cdot a_1 \\ &= \frac{2}{2024 \cdot 2023} \cdot 2023 = \frac{2}{2024} = \frac{1}{1012}. \end{aligned}$$