Soluciones, tarde del jueves 21 de enero

1. Determinar todos los números de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$ tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.

Solución. Comenzamos observando que el número que resulta de insertar un 0 al final de n es $10n$, que al ser múltiplo de 7 obliga a que n también lo sea. De hecho, son múltiplos de 7 los siguientes cinco números:

$$\begin{aligned}
n = \overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\
x = \overline{a0bcd} &= 10000a + 100b + 10c + d \\
y = \overline{ab0cd} &= 10000a + 1000b + 10c + d \\
z = \overline{abc0d} &= 10000a + 1000b + 100c + d \\
w = \overline{abcd0} &= 10000a + 1000b + 100c + 10d
\end{aligned}$$

Como n, x son múltiplos de 7, también lo es su diferencia $x - n = 9000a$, y puesto que 9000 no es múltiplo de 7, debe serlo a. Al ser n un número de 4 cifras, se tiene que $a \neq 0$ y necesariamente debe ser $\boxed{a = 7}$.

De forma similar, $y - n = 9000a + 900b$ es múltiplo de 7, y sabemos que a es múltiplo de 7, luego $900b$ es múltiplo de 7. Y como 900 no es múltiplo de 7, debe serlo b, y se deduce que $\boxed{b = 0 \text{ o } b = 7}$.

Análogamente, razonando con $z - n = 9000a + 900b + 90c$ se obtiene que $\boxed{c = 0 \text{ o } c = 7}$, e insertando las condiciones de ser a, b, c múltiplos de 7 en el número de partida n deducimos que también $\boxed{d \text{ es } 0 \text{ o } 7}$.

Así pues, los números buscados son todos los que empiezan por 7 y las restantes cifras son 0 o 7:

$$7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777.$$

2. Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

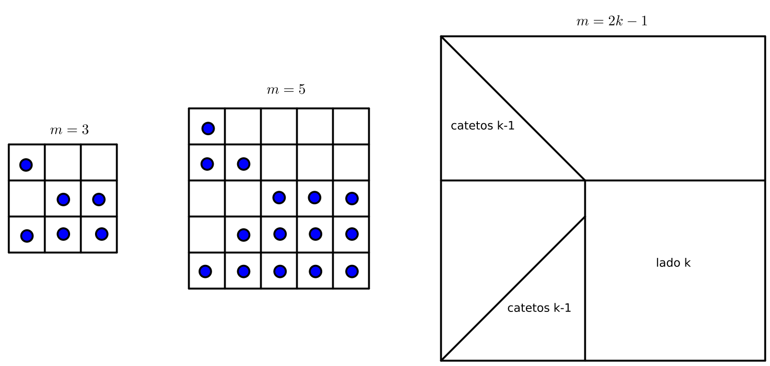
Solución 1. Veremos que las soluciones son todas las parejas (m, n) con $n \geq m$ si m es impar, o $n \geq m - 1$ si m es par.

Para $m = 1$, es inmediato que cualquier tablero $(1, n)$ es posible, por ejemplo llenándolo completamente de piedras.

Nótese la condición necesaria $n \geq m - 1$: para m filas son necesarias al menos $m - 1$ columnas, ya que $m - 1$ es la menor cantidad de piedras que puede contener la fila que tenga más piedras.

Sea $m \geq 3$ impar. Veamos que no es posible alcanzar el caso límite $n = m - 1$. En efecto, para llenar un tablero $(m, m - 1)$ con distintas cantidades de piedras en cada fila, es necesario que las filas tengan $0, 1, \ldots, m - 1$ piedras, en algún orden. El número total de piedras es $\frac{(m-1)m}{2}$, y debe ser igual a $t(m - 1)$, siendo t la cantidad de piedras de cada columna. Como la igualdad $\frac{m}{2} = t$ es imposible cuando m es impar, en este caso el número de columnas debe ser $n \geq m$.

Una solución válida para el tablero (m, m), para $m = 2k - 1$, se obtiene siguiendo el esquema de la siguiente figura:



Las piedras se colocan en dos triángulos rectángulos isósceles de catetos $k - 1$, y en un cuadrado de lado k. Las cantidades de piedras en las filas son $1, 2, \ldots, k - 1, k, k + 1, \ldots, 2k - 1$, y cada columna tiene k piedras.

Para $m \geq 2$ par, el tablero $(m, m - 1)$ se resuelve partiendo de una solución del tablero $(m - 1, m - 1)$ y añadiendo una fila vacía.

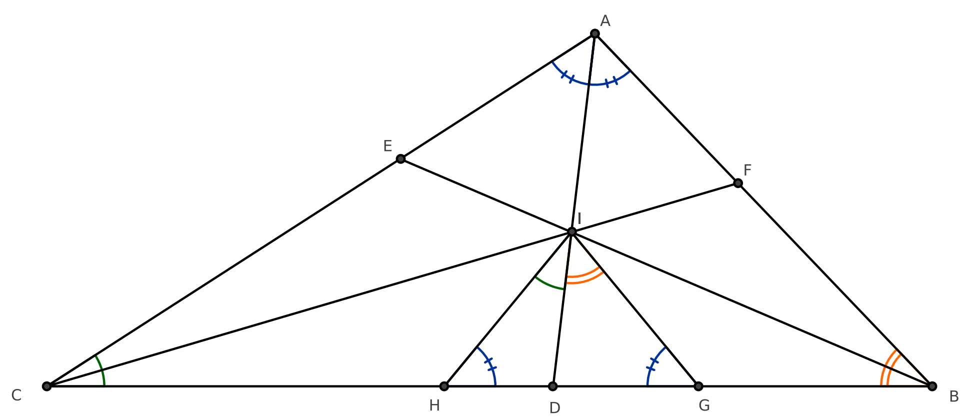
Finalmente, toda solución para un tablero (m, n) puede extenderse a un tablero $(m, n + 1)$, de esta manera: si todas las columnas tienen t piedras, colocamos t piedras en la nueva columna, en las posiciones correspondientes a las t filas que más piedras tenían. Así, las columnas siguen teniendo t piedras cada una, y sigue sin haber dos filas con el mismo número de piedras. Repitiendo las veces que haga falta la operación de paso de (m,n) a $(m,n+1)$, se resuelven todos los tableros (m,n) con $n \geq m$ si m es impar, o $n \geq m-1$ si m es par.

Solución 2. Similar a la anterior, utilizando el siguiente procedimiento para rellenar las casillas en el tablero (m,m), cuando m es impar.

Vamos a colocar k piedras en la fila $k \in [1,n]$. Empezamos por la esquina superior izquierda colocando una piedra. Si la fila tiene todas las piedras que vamos a colocar, seguimos por la casilla inmediatamente abajo a la derecha (si estamos a la derecha del todo, seguimos por la izquierda del todo). Si la fila aún no tiene todas las piedras, entonces seguimos colocando piedras inmediatamente a la derecha de la anterior (la misma convención aplica en el borde). Evidentemente cuando hayamos terminado la última fila, todas las filas tendrán el número deseado de piedras. Además, como el número total de piedras es divisible por el número de columnas, habrá el mismo número de piedras en cada columna.

3. En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.

Solución Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos.



Nótese que los triángulos ABD y GID tienen un ángulo común en D y ángulos iguales en B y en I, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir $\angle DGI = \angle DAB$. De forma análoga, razonando con los triángulos ACD y HID se obtiene $\angle DHI = \angle DAC$.

Los triángulos BIA y BIH resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos A y H son simétricos con respecto a la recta BI, y de forma similar A y G son simétricos respecto de CI.

Las simetrías que acabamos de establecer prueban que:

$$\angle BHE = BAE \quad \text{y} \quad \angle CGF = \angle CAF,$$

y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

Nota: otras soluciones pueden probar y utilizar que los cuadriláteros $ABGI$ y $ACHI$ son inscriptibles (cíclicos), y/o que G, H son puntos de la circunferencia de centro I que pasa por A.

4. Al desarrollar $(1+x+x^2)^n$ en potencias de x, exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de n es esto posible?

Solución Empezamos estudiando qué efecto tiene sobre los coeficientes de un polinomio multiplicar por $(1+x+x^2)$:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{n+1} &= (1+x+x^2)^n(1+x+x^2)\\ &= (a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)(1+x+x^2)\\ &= a_o+(a_o+a_1)x+(a_o+a_1+a_2)x^2+\\ &+ (a_1+a_2+a_3)x^3+\cdots\end{aligned}$$

Si llamamos $\{a_i\}_{i=0}^{2n}$ a los coeficientes de $P_n(x)=(1+x+x^2)^n$ y $\{b_i\}_{i=0}^{2n+2}$ a los de $P_{n+1}(x)$, entonces para todo i se cumple que $b_i=a_{i-2}+a_{i-1}+a_i$, identificando con 0 los coeficientes que no están definidos. Esto sugiere ordenar los coeficientes de los polinomios $P_n(x)$ en forma de triángulo, empezando con 1 en la cúspide, y donde los restantes coeficientes son la suma de los tres que se sitúan por encima de él. Algo así:

```
1
1  1  1
1  2  3  2  1
1  3  6  7  6  3  1
1  4 10 16 19 16 10  4  1
...............................
```

Cada fila es simétrica con extremos 1, y el coeficiente central siempre es impar por ser suma de un impar más dos números iguales.

También vemos que para $n=1,2,4$, $P_n(x)$ tiene 3 coeficientes impares. Veamos que esta situación ocurre para todas las potencias de 2. Es sencillo comprobar que si $P_n(x)$ tiene 3 coeficientes impares (necesariamente los de grado 0, n y $2n$), lo mismo ocurre para $P_{2n}(x)$:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{2n} &= \left((1+x+x^2)^n\right)^2\\ &\equiv (1+x^n+x^{2n})^2\equiv 1+x^{2n}+x^{4n} \pmod 2,\end{aligned}$$

donde hemos despreciado los "dobles productos", al trabajar módulo 2. Partiendo de que $P_1(x)$ tiene 3 términos impares, el procedimiento anterior de paso de n a $2n$ prueba que $P_n(x)$ tiene 3 términos impares para todo n potencia de 2. Veamos que no existen más valores de n con esta propiedad.

Si n no es potencia de 2, existen una potencia de 2 dada por $a=2^k$ y un número b, con $0<b<a$, tales que $n=a+b$. Por lo visto antes, podemos asumir que $P_a(x)\equiv 1+x^a+x^{2a} \pmod 2$. Entonces:

$$\begin{aligned}P_n(x)=P_b(x)P_a(x) &\equiv P_b(x)(1+x^a+x^{2a}) \pmod 2\\ &\equiv P_b(x)+(\text{términos de grado}\geq a>b)\end{aligned}$$

Además, sabemos que $P_b(x)$ tiene su término central x^b impar, y este término "sobrevive" sin que nadie lo cancele, por lo que $P_n(x)$ tiene al menos 4 términos impares: los de grado 0, b, n y $2n$.