



LVI Olimpiada Matemática Española

Primera fase

Primera sesión

Viernes mañana, 17 de enero de 2020



1. Dado un número natural $n > 1$, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento.
2. Sean $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ 2020 números reales de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.
3. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$x + y + z = 1$$

$$x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

$$x^3 + y^2 + z = y^3 + z^2 + x$$

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

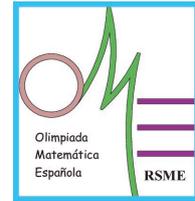


LVI Olimpiada Matemática Española

Primera fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020



4. Consideramos el polinomio

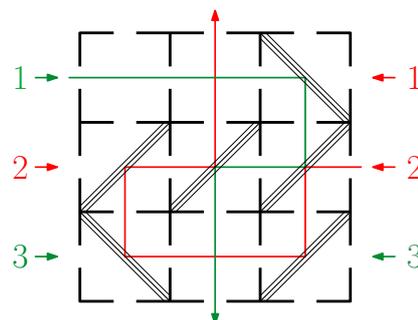
$$p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

5. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D . Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE . La línea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P . Demostrar que BP es perpendicular a AD .

Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.

6. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunas casillas tienen un espejo de doble cara a lo largo de una de sus diagonales. En el exterior de cada casilla de los lados izquierdo y derecho de la cuadrícula se encuentra un puntero láser, que apunta horizontalmente hacia la cuadrícula. Los láseres se numeran de 1 a n en cada lado, en ambos casos de arriba hacia abajo. Un láser es rojo cuando sale de la cuadrícula por el borde superior y es verde si sale de la cuadrícula por el borde inferior. Si cada láser sale o bien por el borde inferior o por el superior, demostrar que la suma de los números asignados a los láseres rojos es menor o igual que la suma de los números asignados a los láseres verdes.



Un ejemplo de configuración, donde se muestran los recorridos de dos láseres.

No está permitido el uso de calculadoras.

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.