Viernes mañana

Problema 1. Sean $a \geq 1$, $b \geq 1$ números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M, respectivamente.

Demostrar que
$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

Solución.

Si a' y b' son los respectivos cocientes obtenidos al dividir a y b entre D, se tiene:

$$a = Da', \quad b = Db', \quad a' \geq 1, \quad b' \geq 1, \quad \text{m.c.d. } (a', b') = 1, \quad M = \frac{ab}{D} = Da'b'.$$

Por consiguiente, la desigualdad propuesta en el enunciado se puede escribir como

$$(Da'b')^2 + D^2 \geq (Da')^2 + (Db')^2,$$

o, equivalentemente,
$$a'^2 b'^2 + 1 \geq a'^2 + b'^2,$$

equivalente, a su vez, a la desigualdad

$$\left(a'^2 - 1\right)\left(b'^2 - 1\right) \geq 0,$$

que es obviamente cierta habida cuenta de que $a' \geq 1$ y $b' \geq 1$ son números naturales, con lo que concluimos.

Se verifica la igualdad solo cuando $a|b$ o $b|a$.

Problema 2. ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica?

Solución.

Sean a, ar, ar^2 números enteros que satisfacen la ecuación

$$a + ar + ar^2 = 111, \tag{1}$$

siendo r un número racional.

Habida cuenta de que $1 + r + r^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, existen números *naturales* p y q, primos entre sí, tales que
$$1 + r + r^2 = \frac{p}{q} \tag{2}$$

y (1) puede escribirse en la forma $a = \frac{111q}{p}$, de donde se sigue que p ha de ser un divisor de 111; a saber, $p \in \{1, 3, 37, 111\}$.

Escribimos ahora (2) como una cuadrática en r,

$$qr^2 + qr + (q - p) = 0, \tag{3}$$

e imponemos que su discriminante, $q\,(4p - 3q)$, sea igual o mayor que cero. Al ser positivo el factor de la izquierda (pues q es un número natural), deberá cumplirse que

$$4p - 3q \geq 0. \tag{4}$$

Tenemos, pues:

Caso $p = 1$. El único valor admisible para q es 1. Al sustituir p y q por 1 en (3), esta ecuación se escribe $r(r+1)=0$, obteniéndose $r=-1$ y $r=0$.

Caso $p=3$. Al ser $q \leq 4$ (por (4)) y m.c.d.$(p,q)=1$ (porque la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible por hipótesis), los valores admisibles para q son $q=1$, $q=2$ y $q=4$.

Si $q=1$, la ecuación (3) se escribe $r^2+r-2=0$ y obtenemos $r=-2$ y $r=1$.

Si $q=2$, la correspondiente cuadrática es $2r^2+2r-1=0$ que no tiene raíces racionales.

Si $p=4$ se tiene $4r^2+4r+1=0$ y $r=-\frac{1}{2}$.

Los casos $p=37$ y $p=111$ pueden discutirse con un razonamiento análogo al anterior.

La tabla siguiente muestra las ternas (p,q,r) válidas:

p	q	r
1	1	-1, 0
3	1	-2, 1
3	4	$-1/2$
37	9	$4/3,\ -7/3$
37	16	$3/4,\ -7/4$
37	49	$-4/7,\ -3/7$
111	1	-11, 10
111	100	$-11/10,\ 1/10$
111	121	$-10/11,\ -1/11$

correspondiendo a las cuales se obtienen las diecisiete soluciones que resuelven el problema:

$r=0$	$111+0+0$
$r=1$	$37+37+37$
$r=-1$	$111-111+111$
$r=-2$	$37-74+148$
$r=-1/2$	$148-74+37$
$r=-3/4$	$48+36+27$
$r=4/3$	$27+36+48$
$r=-7/3$	$27-63+147$
$r=-3/7$	$147-63+27$
$r=-7/4$	$48-84+147$
$r=-4/7$	$147-84+48$
$r=1/10$	$100+10+1$
$r=10$	$1+10+100$
$r=-11$	$1-11+121$
$r=-1/11$	$121-11+1$
$r=-10/11$	$121-110+100$
$r=-11/10$	$100-110+121$

Problema 3. Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x+f(x+y))=f(2x)+y\ ,$$

cualesquiera sean x, y reales.

Solución.

Haciendo las sustituciones $x=f(0)$ y $y=-f(0)$ obtenemos $f(f(0)+f(0))=f(2\cdot f(0))+f(0)$, de donde $f(0)=0$. Sustituyendo ahora $x=0$ en la ecuación dada, dejando la variable y arbitraria, se tiene $f(0+f(y))=f(0)+y$, esto es,

$$f(f(y)) = y. \tag{5}$$

Al sustituir $y = 0$ en la ecuación del enunciado será $f(x + f(x)) = f(2x)$, de donde se sigue que $f(f(x + f(x))) = f(f(2x))$ y, por (1), $x + f(x) = 2x$, es decir,

$$f(x) = x$$

Es inmediato comprobar que esta función es solución cualesquiera sean los valores de x, y, con lo que concluimos.

Viernes tarde

Problema 4 Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1.$$

Solución.

Justificaremos que para todo número real $x > 1$ existe un tal triángulo probando que el lado mayor es menor que la suma de los otros dos. En efecto, para cualquier real $x > 1$, tenemos:

(i) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1 > 0, \qquad x^4 - 1 > 0.$

(ii) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, ya que

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) = x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x-1)\left(x^2 + 1\right) > 0.$$

(iii) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > x^4 - 1.$

(iv) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 < \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) + \left(x^4 - 1\right)$, puesto que

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right) - \left(x^4 - 1\right) &= -x^3 + x^2 - x + 1 \\ &= -(x-1)\left(x^2 + 1\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

y concluimos.

Problema 5 Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4. Solución.

Los restos potenciales de 7 respecto del módulo 10 coinciden con la última cifra, o cifra de las unidades, de las potencias de 7 y siendo

$$\begin{aligned} 7^0 &\equiv 1 \pmod{10} \\ 7^1 &\equiv 7 \pmod{10} \\ 7^2 &\equiv 9 \pmod{10} \\ 7^3 &\equiv 3 \pmod{10} \\ 7^4 &\equiv 1 \pmod{10}, \end{aligned}$$

resulta que 7^n acaba en 3 solo cuando $n = 4q + 3$, q un número natural: en efecto, al ser n de la forma $n = 4q + r$, q y r naturales, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, tenemos

$$\begin{aligned} 7^n = 7^{4q+r} &= \left(7^4\right)^q \cdot 7^r \\ &\equiv 1 \cdot 7^r \pmod{10} \\ &\equiv 3 \pmod{10} \quad \text{solo si } r = 3 \text{ pues } 0 \le r \le 3. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si n acaba en 3, será $n = 4q + 3$ y

$$\begin{aligned}
7^n = 7^{4q+3} &= \left(7^4\right)^q \cdot 7^3 \\
&= 2401^q \cdot 343 \\
&= (2400+1)^q \cdot 343 \\
&= \left(\overset{\bullet}{100}+1\right)^q \cdot 343 \\
&= \left(\overset{\bullet}{100}+1\right) \cdot 343 && (\dagger) \\
&= \overset{\bullet}{100} + 343 \\
&= \overset{\bullet}{100} + (300+43) \\
&= \overset{\bullet}{100} + 43 && (\ddagger) \\
&= \underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}\ldots\underline{a_n}00 + 43 \\
&= \underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}\ldots\underline{a_n}43,
\end{aligned}$$

con lo que la cifra de las decenas es 4, como se quería.

$$(\dagger)\ \left(\overset{\bullet}{100}+1\right)^q = \textstyle\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}100^{q-j}\cdot 1^j = \underbrace{\displaystyle\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q}{j}100^{q-j}}_{=\overset{\bullet}{100}} + \underbrace{\binom{q}{q}100^0}_{=1} = \overset{\bullet}{100}+1.$$

$$(\ddagger)\ \overset{\bullet}{100} + (300+43) = \underbrace{\left(\overset{\bullet}{100}+300\right)}_{=\overset{\bullet}{100}} +43 = \overset{\bullet}{100}+43.$$

Problema 6 Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

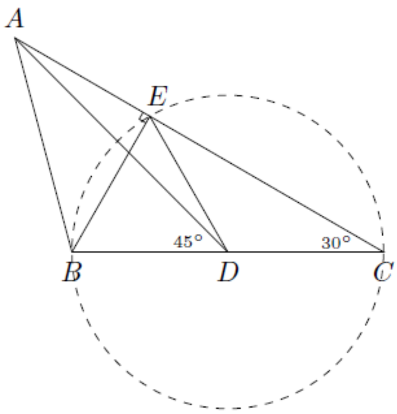
Solución 1.

En $\triangle ABC$, sea E el pie de la perpendicular trazada desde B. Entonces el triángulo EBC es rectángulo en E, el punto D es - por hipótesis - el punto medio de su hipotenusa BC y, por tanto, el circuncentro de dicho triángulo en cuya circunferencia circunscrita el ángulo BDE es el central correspondiente al inscrito $\angle BCE$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\angle BDE &= 2\cdot\angle BCE \\
&= 2\cdot\angle BCA \\
&= 2\times 30^\circ \\
&= 60^\circ.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\triangle EBD$ es equilátero (pues es isósceles y tiene un ángulo de 60°) y, a su vez,

$$\begin{aligned}
\angle ADE &= \angle BDE - \angle ADB \\
&= 60^\circ - 45^\circ \\
&= 15^\circ \\
&= \angle DAE \quad \text{(por el teorema del ángulo exterior aplicado a } \triangle ADC \text{ en } D).
\end{aligned}$$



Así, $\triangle EAD$ es isósceles con $AE = ED$. Mas $ED = EB$, pues $\triangle EBD$ es equilátero, según hemos visto.

Por tanto, $AE = EB$ y $\triangle AEB$ es rectángulo (en E) e isósceles. En consecuencia, $\angle BAE = 45°$ y

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45° - 15° = 30°.$$

Solución 2.

Por el teorema del ángulo exterior aplicado a ADC en D,

$$\begin{aligned}\angle CAD = \angle BDA - \angle DCA = 45° - 30° &= 15° \\ &= \tfrac{1}{2}\angle DCA\end{aligned}$$

y

$$\angle DCA = \angle 2 \cdot \angle CAD.$$

La igualdad anterior se puede escribir, de una manera equivalente[1] como

$$AD^2 = DC\,(DC + CA)\,,$$

esto es,

$$m_a^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

y, por el teorema de la mediana aplicado a ABC, se obtiene

$$\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

o, equivalentemente,

$$b^2 + c^2 - a^2 = ab \tag{6}$$

Consideremos en lo que sigue el triángulo ABC y sus elementos.

Sustituimos el primer miembro de (1) por su igual, $2bc\cos A$ (por el teorema del coseno). Simplificamos y obtenemos

$$2c\cos A = a,$$

equivalente a

$$2\sin C\cos A = \sin A.$$

Dividiendo por $\cos A$ y habida cuenta de que $\angle C = 30°$, resulta

$$\tan A = 1,$$

y

$$\angle A = 45°.$$

Finalmente,

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 45° - 15° = 30°.$$

[1]Si x, y, z son las longitudes de los lados de un triángulo XYZ respectivamente opuestos a X, Y, Z, entonces

$$\angle X = 2 \cdot \angle Y \Leftrightarrow x^2 = y\,(y + z)\,.$$