

NUEVAS GEOMETRÍAS

Belén Martínez Pérez. Profesora de Enseñanza Secundaria. IES Pilar Lorengar (Zaragoza).

1.- Buscando la geometría.



*Entonces el principito señaló con gravedad:
-¡No importa, es tan pequeña mi casa!
Y agregó, quizás, con un poco de melancolía:
-Derecho, camino adelante... no se puede ir muy lejos
De esta manera supe una segunda cosa muy importante: su planeta de origen era apenas más grande que una casa*

Esto no podía asombrarme mucho. Sabía muy bien que aparte de los grandes planetas como la Tierra, Júpiter, Marte, Venus, a los cuales se les ha dado nombre, existen otros centenares de ellos tan pequeños a veces, que es difícil distinguirlos aun con la ayuda del telescopio. (el principito, Antoine De Saint Exupéry)

¿Qué te sugiere esta imagen?



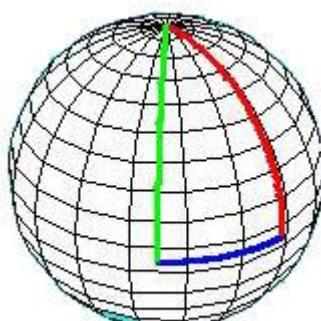
Imagen de la serie Futurama

Unos datos: el planeta Mercurio tiene un radio de 2440km, lo que equivale a 1512 millas....

¿Qué pasaría si nuestro planeta fuera muy pequeño?

Imaginemos un planeta como el del Principito, unos 3 o 4 metros de radio. ¿Seríamos capaces de construir un rectángulo del tamaño de una cancha de baloncesto? Podemos empezar situándonos en el ecuador y allí trazar una línea todo lo "recta" que podamos, (muy recta no saldrá porque observamos que enseguida empezaría a curvarse). Ahora, para la construcción de las bandas, necesitamos dos líneas perpendiculares al ecuador...

Dos rectas perpendiculares al ecuador deberían ser paralelas y sin embargo se cortan. ¿Será que no estamos trazando bien las rectas? ¿Será que no hemos medido los ángulos de forma adecuada? Necesitamos una geometría específica para este pequeño mundo.



1.1.- Los Elementos de Euclides.

Lo primero, ¿Quién fue Euclides?



Euclides fue un Matemático griego que nació hacia el año 330 ac. Estableció las bases de la geometría unificando el conocimiento en cinco axiomas. Uno de ellos afirmaba que dos rectas paralelas nunca llegan a encontrarse.

¿Qué es una recta? *en cualquier geometría la recta es el camino más corto que une dos puntos.*

La geometría de Euclides destaca por su consistencia siempre que... ¡las paralelas no se encuentren!

Pero... ¿Qué pasa si se encuentran?

2.- Si viviésemos en una esfera... Oooh... ¡Espera! ○ ○

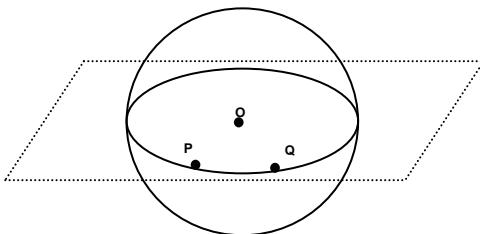
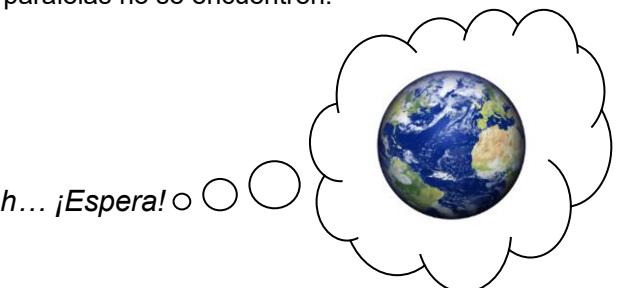
Construyamos nuestra geometría:

2.1.-Rectas, mejor dicho, Geodésicas.

Lo primero que tenemos que analizar es si lo que hemos considerado una recta realmente lo es, es decir, si para ir de P a Q el camino más corto es el ecuador y efectivamente lo es, porque es la línea “**menos curvada**” que se puede trazar en la esfera.

Esta línea resulta de hacer la intersección de la corteza esférica con el plano que determinan P y Q junto con el punto O, centro de la esfera. Mejor, mira el dibujo.

(Este trazado funciona siempre que P y Q no sean diametralmente opuestos)



Ya tememos las “rectas” en nuestra nueva geometría, a estas circunferencias máximas les llamaremos **geodésicas**.

Ejercicio 1.- Dada una recta en el plano euclídeo, si situamos dos puntos sobre ella, ¿cómo queda dividida ésta? ¿Qué pasa si hacemos lo mismo sobre una geodésica? Para hacerlo en la geodésica, te daré un “folio”

Ejercicio 2.- En la geometría de Euclides existe un único camino mínimo entre dos puntos. ¿Es esto siempre cierto en la geometría de la esfera?

Ejercicio 3.- ¿Sabrías demostrar el teorema que sigue?

Teorema:

Dos circunferencias máximas se cortan en dos puntos diametralmente opuestos (antipodales).

Pista: Tomar los planos que contienen a las circunferencias máximas y pensar en su intersección.

Con la demostración de este teorema, podemos concluir el primer gran resultado de nuestra geometría:

DOS GEODÉSICAS CUALESQUIERA TIENEN DOS PUNTOS EN COMÚN.
Es decir, **NO EXISTE PARALELISMO.**

Ejercicio 4.- Indica las posiciones relativas que pueden tener dos rectas en el plano y en la esfera.

Ejercicio 5.- Dadas tres geodésicas, ¿de cuántas maneras puede quedar dividida la esfera? Compáralo con el caso de tres rectas en el plano. ¿Cuántos vértices se determinan en ambos casos?

2.2.- Plano tangente: ángulos en la superficie esférica.

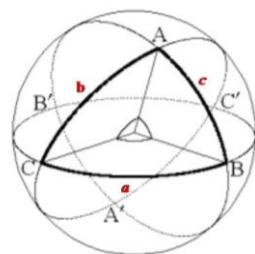
Dado un punto cualquiera de una superficie esférica existe un único plano tangente a la esfera en ese punto. Este plano será perpendicular al radio de la esfera en dicho punto.

Si tenemos dos geodésicas, el ángulo que forman ambas será igual al ángulo formado por las rectas tangentes a las líneas en el punto de incidencia. Dichas rectas nacen de la intersección del plano tangente en el punto con el plano que determina cada una de las geodésicas.

2.3.- Triángulos esféricos.

Un triángulo esférico es una porción de superficie esférica limitada por tres circunferencias máximas. Ahora bien, tres geodésicas de este modo determinan 8 triángulos esféricos. Será preciso determinar de qué triángulo estamos hablando.

Si unimos el centro de la esfera con los vértices del triángulo, obtenemos un tetraedro que se corresponde únicamente con el triángulo esférico. Además, esta correspondencia conserva los ángulos de la manera que se detalla en la figura adjunta. Por lo tanto, **estudiar ángulos de triángulos esféricos, equivale a estudiar los ángulos del tetraedro correspondiente.**



Ejercicio 6.- Calcular ángulos de triángulos esféricos

- a) $A = PN \quad B = (0^\circ, 45^\circ E) \quad C = (0^\circ, 45^\circ W)$
- b) $A = PN \quad B = (0^\circ, 60^\circ E) \quad C = (0^\circ, 60^\circ W)$
- c) $A = PS \quad B = (0^\circ, 30^\circ E) \quad C = (0^\circ, 30^\circ W)$
- d) $A = (45^\circ N, 0^\circ) \quad B = (0^\circ, 90^\circ E) \quad C = (0^\circ, 90^\circ W)$
- e) $A = (60^\circ N, 0^\circ) \quad B = (0^\circ, 90^\circ W) \quad C = (60^\circ S, 0^\circ)$

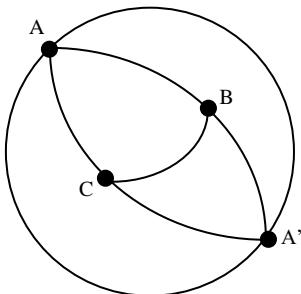
2.4.- Ángulos del triángulo esférico.

Nota: en este punto vas a ver muchos cálculos, te los dejo por si quieras mirarlos un poco en casa. En la sesión no los vamos a desarrollar.

Teorema previo:

En un triángulo esférico, la suma de la medida de los lados es siempre menor que $2\pi r$

Demostración:



Prolongamos los lados AB y AC hasta la antípoda de A ; como CB es geodésica, se verifica:

$$\begin{aligned} BC &< A'B + A'C \Rightarrow \\ AB + AC + BC &< A'B + A'C + AB + AC = ABA' + ACA' = 2\pi r \\ &\Rightarrow AB + AC + BC < 2\pi r. \end{aligned}$$

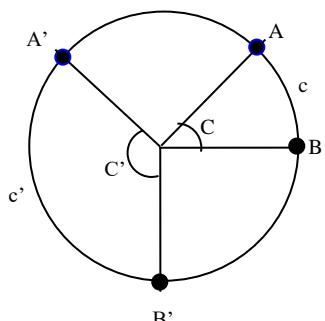
cqd

Teorema:

En un triángulo esférico, los ángulos interiores suman más de 180° .

Demostración:

Lo primero que haremos será construir el **triedro suplementario**. Para ello necesitamos los tres radios de la esfera perpendiculares a los tres planos del triedro de nuestro triángulo esférico.



Nota: para tener una idea intuitiva del triedro suplementario, podemos pensar en el diedro suplementario. Observar que es evidente que los ángulos c y c' suman 180° .

Volviendo al triedro suplementario:

Los arcos de circunferencia a, b y c tendrán unas longitudes de:

$$a = \frac{A2\pi r}{360}; \quad b = \frac{B2\pi r}{360}; \quad c = \frac{C2\pi r}{360} \text{ y los segmentos que determinan } A', B' \text{ y } C':$$

$$a' = \frac{(180 - A)2\pi r}{360}; \quad b' = \frac{(180 - B)2\pi r}{360}; \quad c' = \frac{(180 - C)2\pi r}{360}. \text{ Por lo tanto:}$$

$$a + a' = \frac{A2\pi r}{360} + \frac{(180 - A)2\pi r}{360} = \frac{A2\pi r + 180 \cdot 2\pi r - A2\pi r}{360} = \pi r$$

Del mismo modo: $b + b' = \pi r$; $c + c' = \pi r$

Tomando las tres identidades obtenidas y sumándolas, obtenemos:

$$a' = \pi r - a$$

$$b' = \pi r - b$$

$$c' = \pi r - c$$

$$(a' + b' + c') = 3\pi r - (a + b + c)$$

$$\text{Como } 0 < a' + b' + c' < 2\pi r \Rightarrow 0 < 3\pi r - (a + b + c) < 2\pi r \Rightarrow \pi r < a + b + c < 3\pi r$$

Sustituyendo:

$$\pi r < \frac{A2\pi r}{360} + \frac{B2\pi r}{360} + \frac{C2\pi r}{360} < 3\pi r$$

$$\pi r < \frac{2\pi r(A + B + C)}{360} < 3\pi r$$

$$180 < A + B + C < 540$$

cqd

Ejercicio 7.- ¿Será cierto el Teorema de Pitágoras en Geometría esférica?

2.5.- Huso esférico.

Denominamos **Huso esférico** a cualquier porción de la superficie esférica delimitada por dos geodésicas.

Ejercicio 8.- Sabiendo que el área de la superficie esférica es $4\pi r^2$. ¿Cuál será el área de un huso esférico de ángulo α ?

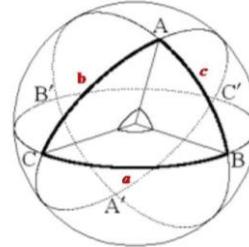
2.6.- Área del triángulo esférico.

Cómo calcular el área de un triángulo esférico.

$$\Delta(ABC) + \Delta(A'BC) = \frac{A}{360} 4\pi r^2$$

$$\Delta(ABC) + \Delta(AB'C) = \frac{B}{360} 4\pi r^2$$

$$\Delta(ABC) + \Delta(ABC') = \frac{C}{360} 4\pi r^2$$



$$\Delta(ABC) + \Delta(ABC') + \Delta(AB'C) + \Delta(AB'C') = \frac{1}{2} 4\pi r^2$$

Como $\Delta(AB'C') = \Delta(A'BC)$, (por ser opuestos por el vértice) tenemos:

$$\Delta(ABC) + \frac{C}{360} 4\pi r^2 - \Delta(ABC) + \frac{B}{360} 4\pi r^2 - \Delta(ABC) + \frac{A}{360} 4\pi r^2 - \Delta(ABC) = 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$2\Delta(ABC) = \left(\frac{A+B+C}{360} \right) 4\pi r^2 - 2\pi r^2 \text{ Por tanto:}$$

$$\Delta(ABC) = \left(\frac{A+B+C}{360} \right) 2\pi r^2 - \pi r^2$$

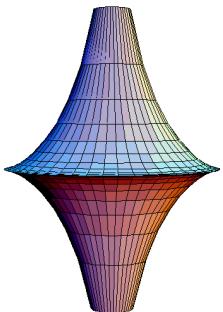
$$\Delta(ABC) = \left(\frac{A+B+C}{180} - 1 \right) \pi r^2$$

$$\boxed{\Delta(ABC) = \left(\frac{A+B+C-180}{180} \right) \pi r^2}$$

Ejercicio 9.- Suponer que tenemos un triángulo en la esfera con ángulos A , B y C , ¿podemos encontrar un triángulo más grande con los mismos ángulos?

3.- Geometría hiperbólica.

Así como la geometría elíptica rechaza la existencia de paralelas, la geometría hiperbólica rechaza la unicidad de la paralela a una recta pasando por un punto exterior a ella.

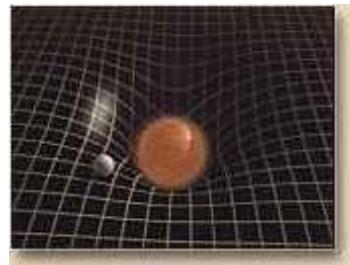


Al contrario que en la esférica, en esta nueva geometría, la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menor que 180° . Esta geometría es la que se ven obligados a aplicar los habitantes de una pseudoesfera

Puede parecer absurdo puesto que ¿Quién puede vivir en una pseudoesfera? Nosotros mismos, la teoría de la relatividad de Einstein, asegura que el espacio donde vivimos está curvado de tal manera que es la geometría hiperbólica la que debemos aplicar en él.

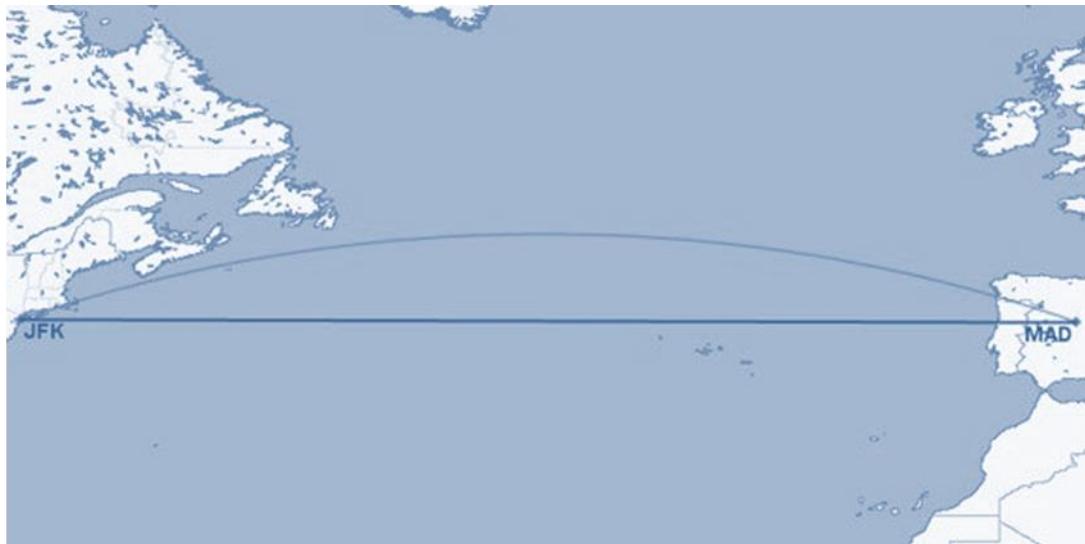
A modo de ejemplo: Newton entendía la gravitación como una acción de *fuerzas*. Dos masas (imaginemos dos esferas) ejercen entre sí una fuerza que se "mueve" (figurativamente hablando) a lo largo de la recta que pasa por sus centros. Para Einstein la gravedad se debe a una "curvatura" del espacio – tiempo. Para él, toda masa produciría una distorsión en el espacio por el cual nosotros nos "deslizaríamos".

Imaginemos una cama bien extendida, su superficie se asemeja a una superficie euclíadiana, plana. Si sobre esa superficie se apoya una bola de plomo, deja de ser plana para transformarse en "curva". Cualquier objeto que se encuentre sobre la sábana cerca de la bola se deslizará hacia él por efecto de la curvatura. En el caso del espacio – tiempo, La Tierra, por ejemplo, curvaría nuestro espacio de manera que cuando soltamos un lápiz él se deslizaría por "esa curvatura" hacia el suelo.

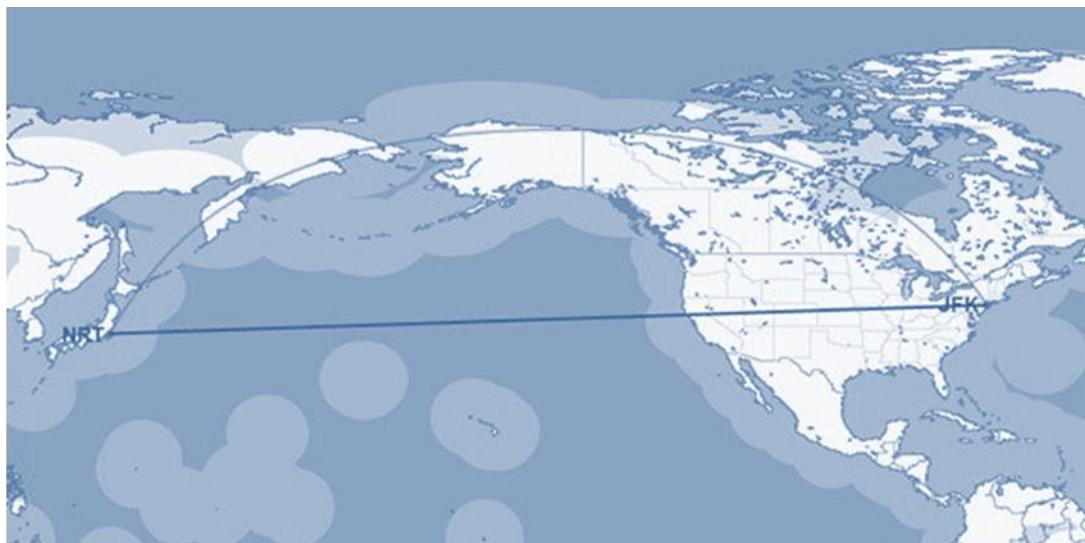


RUTAS AÉREAS

Ruta aérea Madrid-Nueva York



Ruta aérea Nueva York - Tokio



Ruta aérea Pekín- Buenos Aires

