

El Encanto de la Abstracción

Un Análisis de las Matemáticas, la Teoría de Categorías y la Vida¹

¿Qué son las **matemáticas**? Esta es probablemente la pregunta más complicada que vas a encontrar en este documento, precisamente porque no es que exista una respuesta definitiva a la misma. Las matemáticas son muchas cosas, pero hay dos que a mi parecer resumen muy bien el espíritu de esta disciplina, y que desde luego conforman a la perfección el esquema de lo que aquí vamos a tratar:

- la **lógica**, ese proceso racional de argumentación por el cual se determina la veracidad o falsedad de hechos y afirmaciones.
- la **abstracción**, esa capacidad de abordar nociones lo más generales posibles que engloben la máxima cantidad de ejemplos concretos.

Las matemáticas no son la única disciplina que usa estos dos elementos. La filosofía, por ejemplo, usa la lógica, pero la aplica a cuestiones reales. El arte usa la abstracción, pero no se construye mediante la lógica. **Las matemáticas beben de la lógica para construir argumentos rigurosos, combinando esto con la abstracción que permite asegurar que se trabaja sobre un terreno donde la lógica puede hacerse rigurosa.**

¿Que es la **Teoría de Categorías**? Formalmente, es una rama de las matemáticas que trata de establecer de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola. Intuitivamente, **la Teoría de Categorías puede verse como las matemáticas de las matemáticas**, pues alcanza un nivel de abstracción que permite englobar en un solo concepto la práctica totalidad de ramas matemáticas existentes. Es una teoría de las matemáticas, pero es en sí misma una rama, de modo que puede usarse para estudiarse a sí misma.

Naturalmente, no se trata de una abstracción por capricho y sin sentido. La Teoría de Categorías va sobre obtener maneras más generales de expresar cosas sin perder rigor. Busca estudiar diferentes objetos matemáticos y también establecer relaciones entre esos objetos que van más allá de la noción de igualdad a la que estamos acostumbrados, pero lo suficientemente claras para analizarse en términos lógicos. De la misma manera pueden establecerse relaciones entre las relaciones, y por ende relaciones entre las relaciones entre las relaciones... **Es un mundo nuevo en el que ubicar lo ya conocido; una manera de pensar acerca de las matemáticas, y con ello una manera de pensar acerca de cómo pensar.**

Y, ¿qué tiene todo esto que ver con la **vida**? Todos sabemos que las matemáticas modelan multitud de aspectos de la vida, y si la Teoría de Categorías modela las matemáticas, necesariamente también modela la vida. Estudiar ciertas situaciones y propiedades desde el nivel de abstracción de esta teoría puede ayudar a apreciar detalles que no veíamos desde lo concreto. Además, y aunque pueda parecer contradictorio, abstraerse puede simplificar el trabajo sobre esos objetos concretos considerablemente. Son muchas las razones por las que preferir utilizar las ideas abstractas para iluminar ejemplos concretos de nuestra vida en lugar de al contrario. El objetivo es que al finalizar esta lectura comiences a vislumbrar esos beneficios de mirar la vida desde una perspectiva abstracta, pero si eso no te convence, recuerda que la abstracción, así como las matemáticas y la vida, puede ser divertida por sí misma, sin pensar en por qué utilizarla o dónde aplicarla. Es ahí precisamente donde reside su encanto.

¹El título de la sesión se corresponde con la traducción del título del libro *The Joy of Abstraction. An Exploration of Math, Category Theory, and Life*, de la autora Eugenia Cheng, en el cual se basa el contenido de la sesión y de este documento.

1 Comprender la Abstracción. Olvidar Detalles.

Se ha presentado la abstracción como uno de los pilares fundamentales de las matemáticas, como una manera de generalizar casos particulares en estructuras que los engloben. La finalidad de esto es trabajar en un ámbito más general que después pueda particularizarse para abordar los ejemplos concretos de los que partíamos. Para ello es necesario encontrar **similitudes** entre objetos e **ignorar los detalles diferentes para asegurar que la lógica funciona a la perfección**.

Piensa por ejemplo en un plátano y una manzana. Pueden considerarse similares en tanto que ambos son frutas, o alimentos, o simplemente objetos. Se están alcanzando aquí tres niveles de abstracción, y ninguno es mejor o peor que otro, simplemente habrá que elegir hasta donde queremos abstraer en función de lo que queremos trabajar. La abstracción al primer nivel nos permitirá obtener propiedades que serán válidas para todo el resto de frutas, como por ejemplo que tienen vitaminas. Saltar al segundo nivel dará lugar a propiedades más generales que cumple cualquier alimento, como por ejemplo que tienen nutrientes. El tercer nivel amplía la generalidad de las propiedades al caso de cualquier objeto, como por ejemplo que tiene masa.

El proceso de abstracción de un nivel a otro consiste en olvidar cierto detalle que distingue dos cosas para unificarlas en una sola. En el primer paso, por ejemplo, olvidamos si se trata de un plátano o una manzana para englobarlos bajo el término ‘fruta’. En el segundo paso olvidamos que se trata de una fruta para englobar estas bajo el término ‘alimento’ junto con nuevos elementos, como por ejemplo una tableta de chocolate. En el tercer paso olvidamos el detalle de que se trata de un alimento para englobar todos ellos bajo el término ‘objeto’ junto con muchos otros elementos, como por ejemplo una silla. Naturalmente podrían establecerse niveles intermedios en los que este proceso se reduzca a olvidar el detalle que se desea.

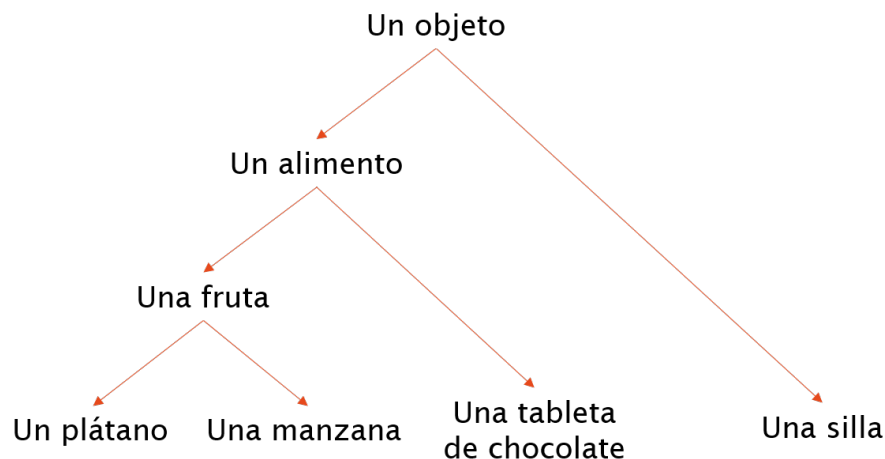


Figure 1: Ejemplo de diagrama con diferentes niveles de abstracción.

La clave reside en encontrar el nivel de abstracción que nos interesa: puede que buscásemos una teoría válida para plátanos y manzanas que aplique a todas las frutas, pero no al resto de alimentos; o que aplique a todos los alimentos pero no a otro tipo de objetos... Finalmente, y una vez alcanzado el mayor nivel de abstracción en el que los razonamientos lógicos que se desean hacer funcionan, pueden añadirse condiciones particulares para volver a los niveles más bajos y constituir las teorías que inicialmente se buscaban.

Veamos un ejemplo aplicado, y menos trivial, de lo anterior: en 2018 en Colorado hubo un juicio involucrando a un pastelero cristiano que se negaba a hacer una tarta para una boda homosexual. Hubo, como no, comentarios en internet argumentando que algo así era comparable a que un pastelero judío se negara a hacer una tarta para una boda entre nazis. Si tu reacción espontánea es decir “¡No, claro que no es comparable!” trata de utilizar la lógica y la abstracción para demostrarlo. En cierto nivel de abstracción ambas situaciones sí son análogas, pues implican negarse a hacer una tarta para alguien con quien están en desacuerdo. Sin embargo, un nivel de abstracción inferior expone la clara diferencia entre ambas, en el segundo caso se trata de negarse a hacer una tarta para alguien que ha cometido un genocidio contra tu pueblo.

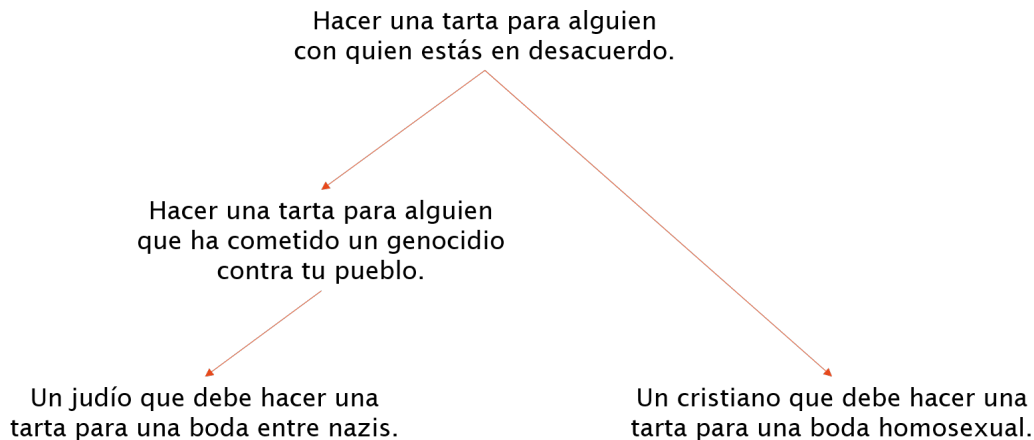


Figure 2: Otro ejemplo, menos trivial, de diagrama con diferentes niveles de abstracción.

Veamos finalmente un ejemplo puramente matemático, para lo cual te invito a reflexionar sobre la siguiente pregunta: **¿qué tienen en común la suma y la multiplicación, y en qué se diferencian?** Es probable que te vengan a la cabeza similitudes como la conmutatividad o la asociatividad, pero eso es porque solo estás pensando en sumar o multiplicar números. Para entender mejor esto, pensemos en el nivel más bajo de abstracción. Cuando aprendemos a sumar, por ejemplo, habitualmente lo hacemos mediante la manipulación de objetos:

“Si tengo una manzana y le añado otra manzana tengo dos manzanas.”

“Si tengo una tableta de chocolate y le añado otra tableta de chocolate tengo dos tabletas.”

“Si tengo una silla y le añado otra silla tengo dos sillas.”

De modo que las entradas de la suma son objetos iguales. En cierto momento, decidimos olvidar el detalle de qué objetos estamos sumando, y expresamos esto abstractamente como

$$1 + 1$$

De la misma manera realizamos otras sumas, como $2 + 3$, $10 + 7$ o $125 + 369$, de modo que las entradas de la suma pasan a ser números, y nos referimos a una suma de dos números cualesquiera

$$a + b$$

Sin embargo, la expresión $a + b$ puede hacer referencia a la suma de otros elementos matemáticos que no sean números propiamente, como matrices, monomios o funciones. En todos ellos la suma es una operación entre dos elementos que en efecto mantiene las propiedades de conmutatividad y asociatividad, y establecerlo en un nivel de abstracción alto nos permite después afirmarlo al particularizar a los casos concretos que podamos necesitar.

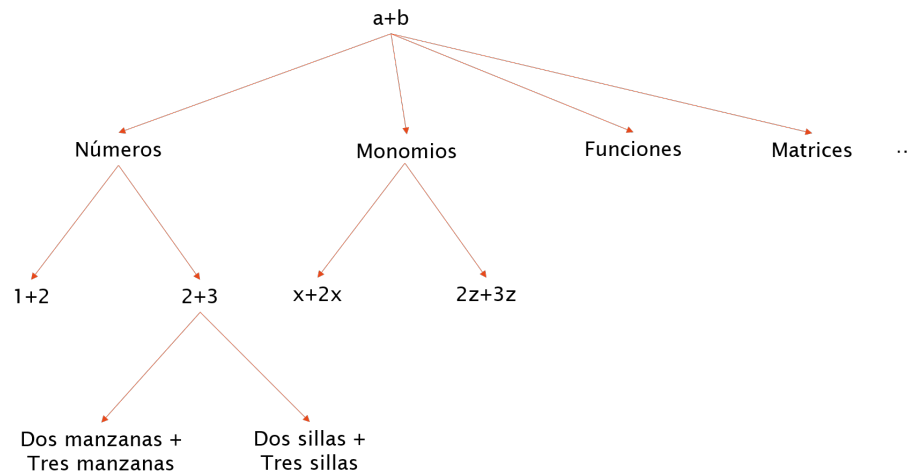


Figure 3: Diagrama de niveles de abstracción de la suma.

Algo similar ocurre con la multiplicación, que expresamos en el nivel de abstracción de dos números cualesquiera como $a \cdot b$. Sin embargo, en este caso en el nivel de abstracción de los objetos, no es necesario tener objetos iguales: podemos, por ejemplo multiplicar dos personas por tres manzanas que tiene cada uno. Observar esto en un nivel de abstracción bajo nos ayuda a extrapolarlo a otros niveles de abstracción mas altos, comprendiendo por ejemplo que se pueden multiplicar monomios con distinta parte literal pero no sumarlos. A diferencia también de lo que ocurría con la suma, no en todos los campos la multiplicación es conmutativa. No lo es, por ejemplo, en el caso de las matrices, de modo que hay que establecer la conmutatividad en un nivel de abstracción inferior que englobe los casos particulares en los que sí se puede afirmar.

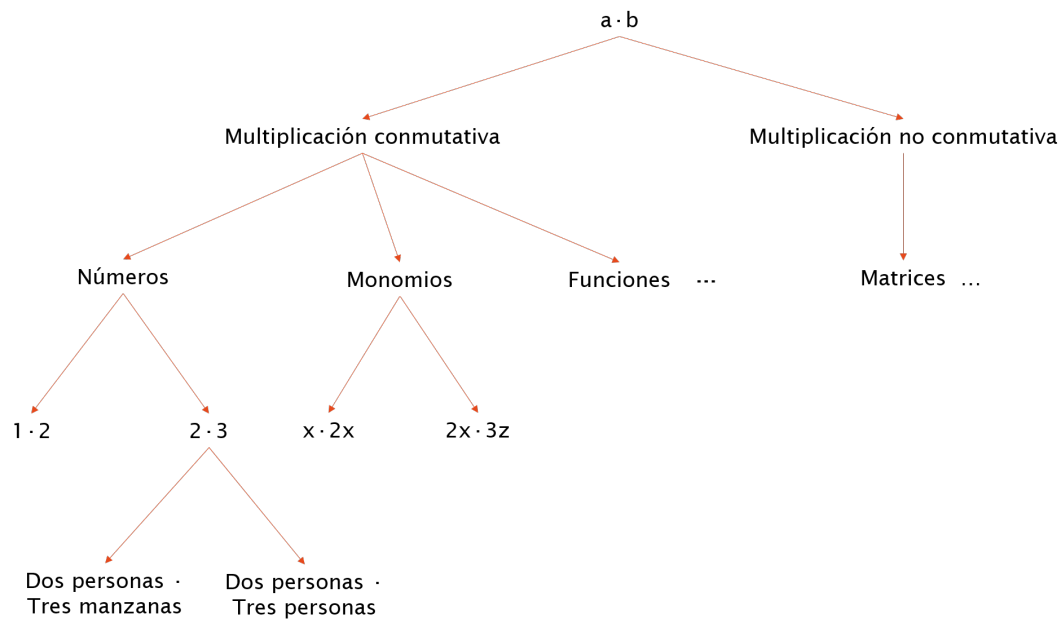


Figure 4: Diagrama de niveles de abstracción de la multiplicación.

Volviendo entonces a la pregunta inicial de similitudes entre la suma y la multiplicación, está claro que si queremos englobarlas en un mismo concepto habremos de olvidar el detalle de la conmutatividad. Podemos construir un nivel de abstracción en el que únicamente tengamos en cuenta que son operaciones con dos entradas y un resultado, lo que en matemáticas llamamos **operaciones binarias**. Podemos representar una operación binaria genérica con el símbolo $\odot$, que puede por tanto hacer referencia a la suma (+), la multiplicación ($\cdot$), u otra operación que tome dos entradas y devuelva un resultado.

Pero la cosa va más allá, podemos aumentar el nivel de abstracción para incluir otro tipo de operaciones más generales. Piensa, por ejemplo, en trayectos de tren: podemos coger un trayecto y añadirle otro para hacer uno más largo, pero esto solo tiene sentido si el primero termina donde empieza el segundo. Esta idea ilustra el concepto matemático de **composición**, de funciones por ejemplo, $g \circ f$ solo tiene sentido si el conjunto de llegada de $f : A \rightarrow B$ coincide con el de partida de $g : B \rightarrow C$. La composición, denotada con $\circ$ es una operación binaria más abstracta que las representadas con $\odot$, en el sentido de que $\odot$ hace referencia a un caso particular de $\circ$ donde se pueden componer cualesquiera dos entradas sin restricciones. Este nuevo nivel de abstracción permite incluir muchos más ejemplos, como el de las funciones u otras muchas ramas de las matemáticas.

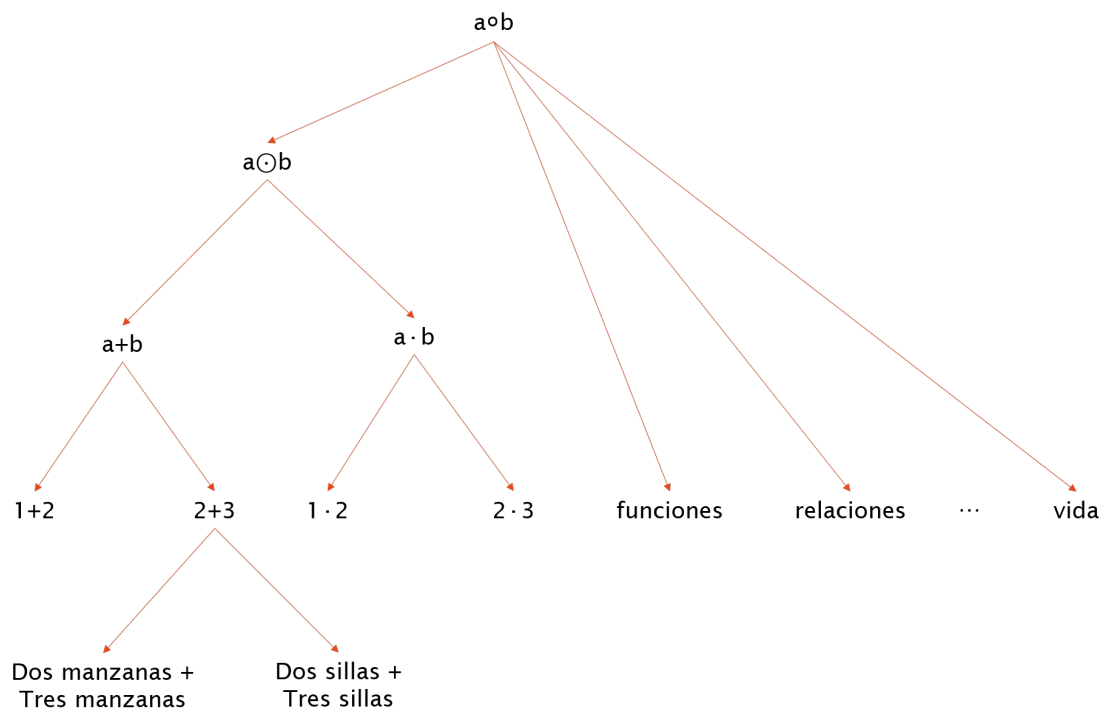


Figure 5: Diagrama de niveles de abstracción de las operaciones.

Tal nivel de abstracción parece alejarnos de la vida cotidiana, pero a su vez es lo que nos permite unificar un abanico muy grande de ejemplos, incluidos casos propios de esa vida cotidiana, como el de los trayectos de tren. **Más abstracto no significa menos relevante ni más complicado.** A menudo pensamos que no podemos alcanzar un nivel de abstracción hasta no haber dominado el inmediatamente inferior, y esa concepción errónea puede hacer a mucha gente sentirse excluida de las matemáticas. Los niveles de abstracción altos pueden resultar en ocasiones más sencillos, bien por el simple hecho de encontrarlos más satisfactorios o por la utilidad que tienen al englobar más y más ejemplos que las situaciones básicas en los niveles de abstracción bajos.

2 Relaciones

Observando el diagrama de la Figura 5, puede que el término ‘relaciones’ no te resulte familiar, o que no tengas claro a qué se refiere. Esta palabra ha aparecido también en la introducción del documento, concretamente en la presentación de la Teoría de Categorías. Y es que las relaciones son la clave de la construcción de esta teoría, y la manera de entender y representar las relaciones es la base para entender y representar las categorías. El concepto de **relación** no tiene más complicación que el que le otorgamos en la vida cotidiana, **un vínculo entre dos elementos**.

Piensa por ejemplo en las relaciones familiares representadas en un árbol genealógico. A priori existen muchísimas relaciones diferentes (primo, cuñado, abuela...) pero si nos fijamos bien todo se reduce a tres: pareja, padre/madre-hijo/hija o hermanos. Cualquier otra relación podrá expresarse como un encadenamiento de estas.

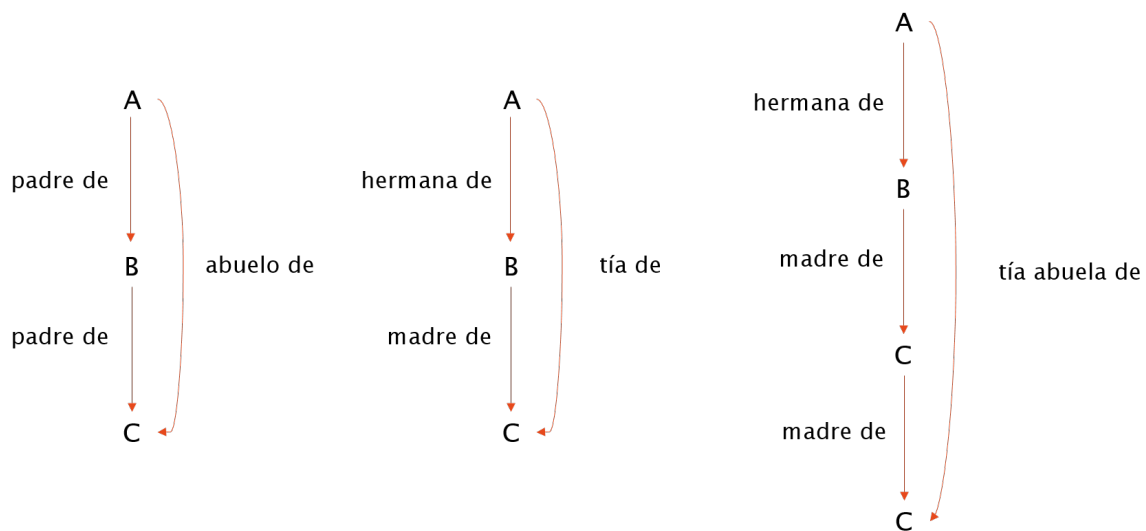


Figure 6: Ejemplos de relaciones familiares compuestas.

En realidad, hay una cuarta relación básica que no estamos teniendo en cuenta, una relación inherente que cada cual tiene consigo mismo que naturalmente no vamos a representar, pero que puede dar lugar a ambigüedades en ciertos encadenamientos de relaciones.

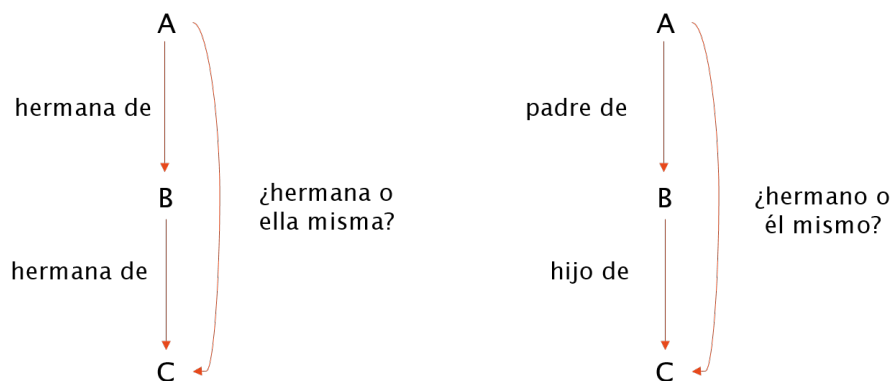


Figure 7: Ejemplos, algo menos triviales, de relaciones familiares compuestas.

En el ámbito matemático, las relaciones pueden a menudo interpretarse como abstracciones a través del concepto de ‘olvidar detalles’ expuesto en la sección anterior. Un ejemplo interesante sobre el que puedes reflexionar surge de la siguiente pregunta: **¿qué tipos de cuadriláteros existen y qué relaciones existen entre ellos?**. Seguro que te vienen a la mente unos cuantos: cuadrado, rombo, trapecio... ¿Cómo podemos clasificarlos y relacionarlos de manera ordenada?

Empezando por el cuadrado, se trata de un caso particular de cuadrilátero que cumple que todos sus lados son iguales y sus ángulos también, por lo cual miden 90° . Si olvidamos el detalle de que los lados son iguales, pero mantenemos los ángulos de 90° , obtenemos un cuadrilátero con los lados iguales dos a dos, es decir, un rectángulo. Si por el contrario olvidamos el detalle de que los ángulos son iguales, pero mantenemos los lados iguales, obtenemos un cuadrilátero con los ángulos iguales dos a dos, es decir, un rombo.

El rectángulo y el rombo son casos generales, o abstracciones, del cuadrado. Dicho de otra forma, todo cuadrado es un caso particular de rectángulo y también de rombo, al que se le ha añadido una condición extra. Si ahora olvidamos la condición restante obtenemos un cuadrilátero con lados y ángulos cualesquiera, es decir, un cuadrilátero genérico. Sin embargo, sabemos que hay otro tipo de cuadriláteros intermedios, correspondientes con niveles intermedios de abstracción.

Si imponemos que el cuadrilátero tenga dos lados paralelos obtenemos un trapecio. Se trata de un caso particular de cuadrilátero que a su vez es más general que rectángulo y rombo. Si se impone no solo que haya dos lados paralelos sino que los lados sean paralelos dos a dos, se obtiene un paralelogramo, caso particular de trapecio que sigue siendo más general que rectángulo y rombo.

Hay un último tipo de cuadrilátero en el que puede que no hayas reparado. Imagina un rombo y estíralo desde uno de sus vértices, alargando los dos lados que confluyen en dicho vértice pero no los dos restantes. El resultado no es un paralelogramo, ni siquiera un trapecio, pero posee una propiedad particular que no poseen todos los cuadriláteros: sus diagonales son perpendiculares. Es un nivel intermedio entre el rombo y el cuadrilátero genérico, ajeno a los trapecios y sus subtipos, y recibe el nombre de cometa.

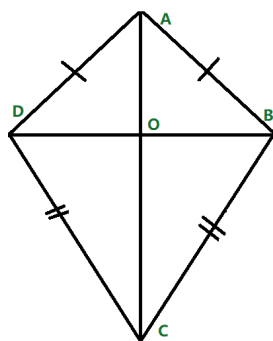


Figure 9: Tipo de cuadrilátero denominado ‘cometa’.

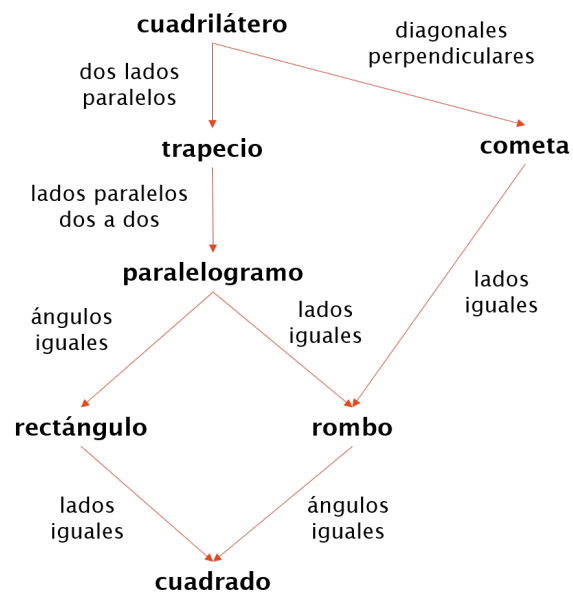


Figure 8: Diagrama completo de clasificación y relaciones entre cuadriláteros, visto como diagrama de abstracción.

¿Y qué hay de los números? ¿Qué relaciones podemos encontrar entre números, pongamos los naturales? Si pensamos en agrupar los números de forma similar a lo que hemos hecho con los cuadriláteros, una primera clasificación natural viene dada por la paridad. Los números naturales se dividirían en dos grandes grupos: pares e impares, según sean o no divisibles por dos.

Podríamos hacer algo similar con la divisibilidad por otro número. Si lo hacemos con el tres obtendríamos tres grandes grupos desconectados, los de la forma números de la forma $3k$, los de la forma $3k + 1$ y los de la forma $3k + 2$, para cierto k . Dentro de cada uno de ellos habría algunos pares y otros impares, de modo que podríamos subdividir cada grupo grande en dos más pequeños.

Si lo hacemos con el cuatro sería algo distinto, puesto que todos los divisibles por cuatro serían pares, mientras que los que no lo son podrían ser pares o impares. Es decir, ser divisible por cuatro es un caso particular de ser par, o ser par es una generalización de ser divisible por cuatro.

De manera general, estamos hablando de una relación importante existente entre los números naturales, **la relación de divisibilidad**. Si cierto número natural a divide a otro número natural b , existe una relación que podemos expresar como $a|b$ o $a \xrightarrow{c} b$, lo cual viene a decir que existe un número natural c tal que $a \cdot c = b$. En el caso de que un número tenga un divisor que a su vez tenga otro divisor, se encadenarían dos relaciones de divisibilidad. Al igual que el cuadrado era caso particular del rectángulo y al ser este caso particular del paralelogramo el cuadrado también es caso particular del paralelogramo, el 2 divide al 4 y el 4 divide al 12, por ejemplo, de modo que el 2 divide al 12. Naturalmente, no es necesario que representemos todas las relaciones, únicamente las mínimas que nos permiten deducir las demás, como en el caso de las relaciones familiares. De la relación de divisibilidad surgen unos diagramas muy interesantes denominados **diagramas de factorización**, consistentes en representar las relaciones de divisibilidad existentes entre todos los divisores de un cierto número. Te invito a que pruebes a hacerlo con el 30.

Los divisores de 30 son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30. Vamos a tratar de construir un diagrama de factorización teniendo en cuenta la idea de ‘olvidar detalles’. En concreto, sabemos que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, de modo que podemos ‘olvidar’ uno de estos factores para obtener un divisor de 30. Si olvidamos el 2 nos queda $3 \cdot 5 = 15$, si olvidamos el 3 nos queda $2 \cdot 5 = 10$, y si olvidamos el 5 nos queda $2 \cdot 3 = 6$. Si en lugar de olvidar un factor olvidamos dos de ellos obtendremos el 5, el 3 y el 2, y si olvidamos los tres obtendremos el 1. Entre los divisores obtenidos existen diversas relaciones de divisibilidad, por ejemplo: podemos llegar al 3 olvidando el 2 y luego el 5, es decir, pasando por el 15, u olvidando el 5 y luego el 2, es decir, pasando por el 6. Esto está representando, en esencia, la conmutatividad de la multiplicación. El diagrama completo tiene forma de cubo, representando cada cara del cubo un caso concreto de conmutatividad, lo cual es más interesante que ver los divisores escritos en línea.

Estamos observando diferentes propiedades de ciertas relaciones que nos son útiles para poder establecer teorías y deducciones sobre ejemplos abstractos. **¿Hasta dónde podemos llegar con esto razonando siempre dentro de la lógica?**

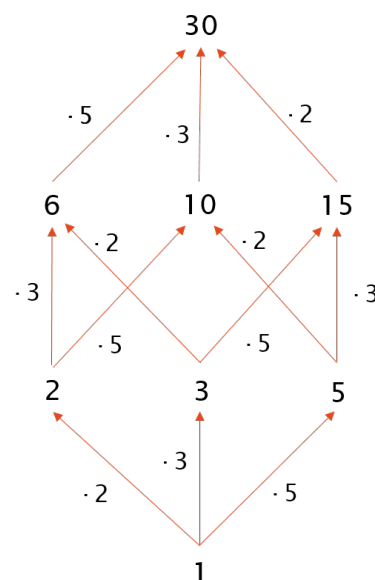


Figure 10: Diagrama de factorización del 30.

3 Equivalencia y Orden

Los ejemplos anteriores empiezan a mostrar la manera en que funciona la Teoría de Categorías en base a ciertos elementos y las relaciones entre ellos. La pregunta con la que cierra la sección anterior hace referencia a una característica propia de esta teoría que también se menciona en la introducción, y es que se quiere poder analizar relaciones que van más allá de la noción de igualdad pero quedan dentro de una lógica razonable. En esta sección exploramos a qué nos referimos con eso de relaciones que “van más allá de la igualdad”.

Hemos de empezar por notar que la igualdad es, de hecho, una relación, que denotamos habitualmente con el símbolo $=$, y que podemos aplicar en diferentes contextos: en un contexto familiar haría referencia a ese concepto de relación que cada uno tiene consigo mismo, en el contexto de los cuadriláteros haría referencia a que cierto cuadrilátero sea del mismo tipo que otro, y en el caso de los números haría referencia a que un número sea igual a otro. Vemos que en todos los casos se trata de una relación muy estricta: en el caso de las familias nos impide establecer conexiones con otros miembros, en el caso de los cuadriláteros nos impide ver un cierto tipo como caso particular de otro, y en el caso de los números básicamente nos impide todo. Sin embargo, la relación de igualdad es sumamente importante, y esto se debe a unas propiedades concretas que posee. La idea es buscar esas propiedades en otro tipo de relaciones para ampliar un poco el espectro.

Para ello vamos a pensar en las relaciones de manera más abstracta. Denotaremos una **relación abstracta** con el símbolo $\triangleright$ de modo que si tenemos dos objetos a y b tales que a está relacionado con b escribiremos

$$a \triangleright b$$

Notar que la relación va en un sentido pero no necesariamente en el otro. Si la relación es “ser caso particular de” tendríamos, por ejemplo que *cuadrado* $\triangleright$ *paralelogramo* pero no al contrario *paralelogramo* $\ntriangleright$ *cuadrado*. Una relación tiene que estar definida sobre un conjunto, que denotaremos por S . Puder ser un conjunto de números, personas, cuadriláteros... A continuación vamos a examinar diferentes propiedades que una relación $\triangleright$ puede tener. Hemos de tener en mente en todo momento que estamos intentando suavizar la relación de igualdad, de modo que vamos a intentar explorar las propiedades que esta tiene para trasladarlas a nuevas relaciones.

3.1 Reflexividad

Una primera propiedad que ya hemos mencionado es que bajo una relación de igualdad, todo elemento está relacionado consigo mismo. A esta propiedad la llamamos reflexividad, más concretamente, **se dice que una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S es reflexiva si**

$$a \triangleright a \text{ para cualquier } a \text{ de } S$$

Así, formalmente diríamos que la relación $=$ es reflexiva sobre $\mathbb{R}$ (o sobre cualquier otro conjunto numérico) porque

$$a = a \text{ para cualquier } a \text{ de } \mathbb{R}, \text{ esto es, para cualquier número real } a.$$

Pensemos ahora en relaciones fuera del ámbito matemático. Considera S el conjunto de todas las personas del mundo y las relaciones “tiene la misma altura que”, “es más alta que” y “va a clase con”. Tómate un segundo para pensar acerca de la reflexividad de estas relaciones. Examinemos la definición de reflexividad para cada una de ellas

- En el caso de “tiene la misma altura que” se da que

a “tiene la misma altura que” a para cualquier persona a del mundo,

así que la relación es reflexiva.

- En el caso de “es más alta que” no se da que

a “es más alta que” a para cualquier persona a del mundo,

de hecho no se da para nadie, así que la relación no es reflexiva.

- En el caso de “va a clase con” se da que

a “va a clase con” a para cualquier persona a del mundo que vaya a clase,

pero hay personas en el mundo que no van a clase, de modo que no es cierto para cualquier persona del mundo, así que la relación no es reflexiva.

El último ejemplo pone de manifiesto lo estrictas que son las matemáticas abstractas, y en particular el hecho de que basta un solo contraejemplo para que cierta propiedad general falle.

3.2 Simetría

Ya se ha mencionado previamente el hecho de que una relación, en general, va en un solo sentido. Sin embargo, la relación de igualdad va en ambos. A esta propiedad la llamamos simetría, más concretamente, **se dice que una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S es simétrica si**

Para cualesquiera a y b de S tales que $a \triangleright b$, se tiene $b \triangleright a$

Así, formalmente diríamos que la relación $=$ es simétrica sobre $\mathbb{R}$ porque

Para cualesquiera números reales a y b tales que $a = b$, se tiene $b = a$.

Considera de nuevo S el conjunto de todas las personas del mundo, y toma las relaciones “tiene la misma altura que”, “es madre de” y “es hermana de”. Tómate un segundo para pensar acerca de la simetría de estas relaciones. Examinemos la definición de simetría para cada una de ellas

- En el caso de “tiene la misma altura que” se da que

Para cualesquiera personas del mundo a y b tales que a “tiene la misma altura que” b se tiene que b “tiene la misma altura que” a ,

así que la relación es simétrica.

- En el caso de “es madre de” no se da que

Para cualesquiera personas a y b tales que a “es madre de” b se tiene que b “es madre de” a , de hecho no se da para nadie, así que la relación no es simétrica.

- En el caso de “es hermana de” tampoco se da que

Para cualesquiera personas a y b tales que a “es hermana de” b , b “es hermana de” a ,

pues b podría ser hermano de a , así que la relación no es simétrica, pues falla en ciertos casos.

Notar que en el caso de la reflexividad se consideraba cada elemento del conjunto por separado, mientras que la simetría involucra pares de elementos. La tercera y última propiedad hace referencia a tríos de elementos.

3.3 Transitividad

La última propiedad importante de la igualdad, y quizás la más importante, es la de poder encadenar igualdades para formar otras nuevas. A esta propiedad la llamamos transitividad, más concretamente, **se dice que una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S es transitiva si**

Para cualesquiera a, b y c en S tales que $a \triangleright b$ y $b \triangleright c$ se tiene que $a \triangleright c$

Así, formalmente diríamos que la relación $=$ es simétrica sobre $\mathbb{R}$ porque

Para cualesquiera números reales a, b y c tales que $a = b$ y $b = c$ se tiene que $a = c$.

Considera de nuevo S el conjunto de todas las personas del mundo, y toma las relaciones “tiene la misma altura que”, “está casada con” y “canta en un coro con”. Tómate un segundo para pensar acerca de la transitividad de estas relaciones. Examinemos la definición de transitividad para cada una de ellas

- En el caso de “tiene la misma altura que” se da que

Para cualesquiera personas del mundo a, b y c tales que a “tiene la misma altura que” b y b “tiene la misma altura que” c , se tiene que a “tiene la misma altura que” c ,

así que la relación es transitiva.

- En el caso de “está casada con” no se da que

Para cualesquiera personas del mundo a, b y c tales que a “está casada con” b y b “está casada con” c , se tiene que a “está casada con” c ,

pues en la mayoría de países la única posibilidad de que esto ocurra es que a y c sean la misma persona, y ninguna persona está casada consigo misma, así que la relación no es transitiva.

- En el caso de “canta en un coro con” no se da que

Para cualesquiera personas del mundo a, b y c tales que a “canta en un coro con” b y b “canta en un coro con” c , se tiene que a “canta en un coro con” c ,

pues b podría cantar en dos coros distintos, en uno con a y en otro con c , así que la relación no es transitiva.

Si bien la transitividad se expresa en términos de tríos de elementos, permite construir cadenas tan largas como queramos encadenando más y más relaciones, pero para definir la propiedad no tenemos que especificar todas las cadenas de cualquier longitud posible, nos basta con las que encadenan dos relaciones.

Las tres propiedades anteriores imponen una analogía sobre cierta relación con la relación de igualdad $=$. Basándonos en esta analogía definimos el concepto que generaliza o suaviza la noción de igualdad, la equivalencia: **una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S se denomina equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.**

Considera una última vez S el conjunto de todas las personas del mundo y las relaciones “tiene la misma altura que”, “es mayor que”, “es amiga de”. Tómate un segundo para determinar si estas relaciones son equivalencias.

- En los apartados anteriores hemos concluido que la relación “tiene la misma altura que” es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia. La clave está en las palabras *la misma*, que de alguna manera enmascaran la noción de igualdad, es decir, esta relación podría redefinirse como “es igual (en altura) a” y por tanto es trivialmente una equivalencia en tanto que es una igualdad.
- La única propiedad que cumple la relación “es mayor que” es la transitividad, pues si a “es mayor que” b y b “es mayor que” c naturalmente a “es mayor que” c . Sin embargo, no es reflexiva, pues ninguna persona es mayor que ella misma; ni tampoco simétrica, pues si a “es mayor que” b , necesariamente b es menor que a . En conclusión, no es una equivalencia.
- El análisis de la relación “es amiga de” es algo más filosófico, quizás incluso deprimente.
 - La transitividad es la propiedad más fácil, y menos deprimente, de analizar. Si a “es amiga de” b y b “es amiga de” c , no podemos deducir que a “es amiga de” c , pues a y c no tienen ni siquiera por qué conocerse.
 - La simetría empieza a mostrar el carácter filosófico de esta relación. Si a “es amiga de” b , ¿puedes afirmar con seguridad que b “es amiga de” a ? Tristemente no, pues hay amistades que no van en ambas direcciones, así que la relación no es simétrica.
 - La reflexividad es quizás la más deprimente de todas, pues lamentablemente hay personas que no son amigas de sí mismas. El amor propio, o mejor dicho la amistad propia es algo importante en lo que trabajar pero que no siempre se da, y precisamente por eso la relación no es reflexiva.

Obviamente no se trata de una situación rigurosa y está abierta a interpretación, pero es interesante ver cómo las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad se comportan en ámbitos de la vida real.

Para terminar de comprender la noción de equivalencia volvamos al mundo matemático y analicemos algunas relaciones conocidas interesantes. Considera $S = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y las relaciones “es menor o igual que ($\leq$)”, “divide a ($|$)” y “es congruente módulo n a ($\equiv_n$)”. ¿Cuáles de estas relaciones son equivalencias?

- La relación $\leq$ es reflexiva, pues $a \leq a$ para todo número entero a (en particular $a = a$), y es transitiva, pues si $a \leq b$ y $b \leq c$ necesariamente $a \leq c$. Sin embargo, no es simétrica, pues por ejemplo $1 \leq 2$ pero $2 \not\leq 1$. Así pues no es una equivalencia.
- La relación $|$ es reflexiva, pues $a|a$ para todo número entero a , y es transitiva, pues si $a|b$ y $b|c$, necesariamente $a|c$. Sin embargo, no es simétrica, pues por ejemplo $2|4$ pero $4 \nmid 2$. Así pues no es una equivalencia.
- La relación $\equiv_n$ se traduce como $n|b-a$, de modo que es reflexiva porque $n|a-a=0$, simétrica porque si $n|b-a$ necesariamente $n|a-b=-(b-a)$, y es transitiva pues si $n|b-a$ y $n|c-b$ necesariamente $n|b-a=(c-b)+(b-a)$. Así pues, es una equivalencia.

¿Significa esto que relaciones tan importantes como $\leq$ o $|$ quedan fuera de la Teoría de Categorías? En la próxima sección veremos que no, que las categorías son mundos mucho más flexibles. Pero para terminar esta sección vamos a analizar más profundamente estas dos relaciones y sus propiedades más características.

3.4 La relación $\leq$. Orden Total.

La única propiedad que le falta a la relación $\leq$ para ser una equivalencia es la simetría. De hecho, esta relación cumple algo que podemos considerar contrario a la simetría

$$\text{si } a \leq b, \text{ entonces } b \geq a$$

Esto puede expresarse así porque existe una relación contraria a $\leq$, que es $\geq$. De manera más general lo que estamos intentando decir es que

$$\text{si } a \leq b, \text{ entonces no puede ser } b \leq a, \text{ a no ser que } a = b$$

Esta propiedad se llama antisimetría, más concretamente, **se dice que una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S es antisimétrica si**

Para cualesquiera a y b en S tales que $a \triangleright b$ y $b \triangleright a$ se tiene que $a = b$.

Una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S se denomina orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En dicho caso S se denomina un conjunto ordenado. Así pues, la relación $\leq$ es un orden sobre $\mathbb{Z}$. En particular, esta relación nos permite comparar cualesquiera dos elementos de $\mathbb{Z}$, es decir

$$\text{dados } a \text{ y } b \text{ en } \mathbb{Z}, \text{ se tiene que } a \leq b \text{ o } b \leq a$$

Esta propiedad se llama tricotomía, más concretamente, **se dice que una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S es tricotómica si**

Para cualesquiera a y b de S , se tiene que $a \triangleright b$ o $b \triangleright a$.

Una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S que es un orden y es tricotómica se denomina un orden total. En dicho caso S se denomina un conjunto totalmente ordenado, un TOSET (del inglés Totally Ordered Set). Así pues, la relación $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{Z}$.

3.5 La relación $|$. Orden Parcial.

La relación $|$ sobre $\mathbb{Z}$, al igual que $\leq$, es reflexiva y transitiva, pero no es una equivalencia porque no es simétrica. ¿Es antisimétrica? Sí, porque

Para cualesquiera a y b en $\mathbb{Z}$ tales que $a|b$ y $b|a$ se tiene que $a = b$

Así pues, $|$ es un orden sobre $\mathbb{Z}$. ¿Es un orden total? No, considera por ejemplo los números enteros 2 y 3: ni se tiene que $2|3$, ni tampoco que $3|2$. **Una relación $\triangleright$ sobre un conjunto S que es un orden pero no es tricotómica se denomina un orden parcial. En dicho caso S se denomina un conjunto parcialmente ordenado, un POSET (del inglés, Partially Ordered Set).** Así pues, la relación $|$ es un orden parcial sobre $\mathbb{Z}$.

Notar que un mismo conjunto puede ser totalmente ordenado o parcialmente ordenado según la relación de orden con la que se le equipe. $\mathbb{Z}$ es totalmente ordenado con $\leq$ y parcialmente ordenado con $|$. Con la relación $<$ ni siquiera es ordenado, pues no es una relación reflexiva.

Un ejemplo ya visto de POSET es el conjunto de los divisores del 30 que representábamos en forma de diagrama de factorización en la Figura 10. Basándonos en ella, vamos a tratar de construir el del 42. Los divisores de 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42, tantos como los del 30. Si los colocamos en las posiciones análogas al diagrama de cubo del 30, de menor a mayor, encontramos problemas para trazar las flechas: ¿por qué número multiplico el 2 para que dé 7? ¿Y el 3? ¿Y por qué multiplico el 6 para que me dé 14 o 21?

La clave está en que no debemos colocar los números de menor a mayor, o mejor dicho, sí, pero no en base a la relación de orden habitual $\leq$, sino a la relación de orden de este POSET que es la de divisibilidad $|$. Los tres números que van en la primera fila no son los tres divisores más pequeños (sin contar el 1) sino los tres factores primos, que es el equivalente a “más pequeño” cuando hablamos de divisibilidad; en el caso del 42 serán 2, 3 y 7. En el segundo piso van los números que son producto de dos primos, esto es $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 7 = 14$ y $3 \cdot 7 = 21$. En el último piso va el único que es producto de tres primos, $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. Así, todo número que sea producto de tres primos distintos podrá representarse mediante un diagrama con la misma forma que estos.

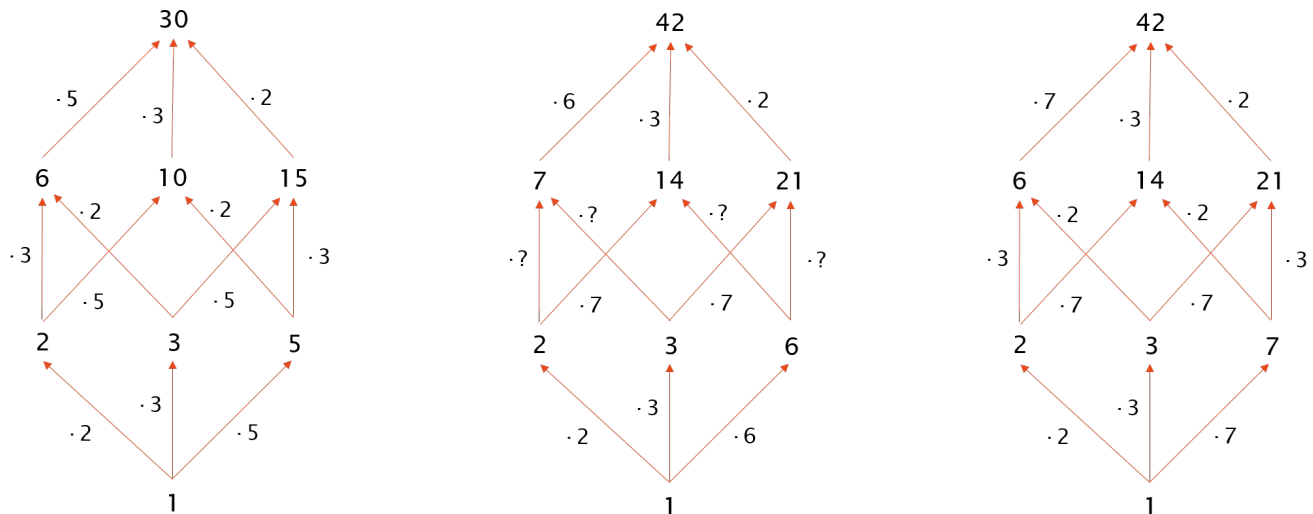


Figure 11: Fallo al intentar construir del diagrama de factorización del 42 en base al del 30 y corrección del mismo.

A continuación vamos a construir un diagrama con esta misma forma en el que en lugar de utilizar factores primos consideraremos privilegios sociales, en particular “ser hombre”, “ser blanco” y “ser rico”. El 1 se sustituye aquí por no tener ninguno de esos privilegios. En el segundo nivel aparecerán combinaciones de dos de estos privilegios, más concretamente “hombre blanco”, “hombre rico” y “blanco rico”. En el último nivel estará la combinación de los tres “hombre blanco rico”. Añadir un nuevo privilegio es el análogo a multiplicar por un nuevo factor primo, creando un nuevo ejemplo de POSET.

Las relaciones de equivalencia y las de orden son de especial importancia a la hora de constituir la Teoría de Categorías, pues en ellas podemos englobar la práctica totalidad de relaciones existentes en el ámbito matemático, y muchas fuera de él. **Ambas tienen en común la reflexividad y la transitividad, de modo que vamos a construir la noción de categoría en base a ellas, o mejor dicho, en base a una versión abstracta de ellas.**

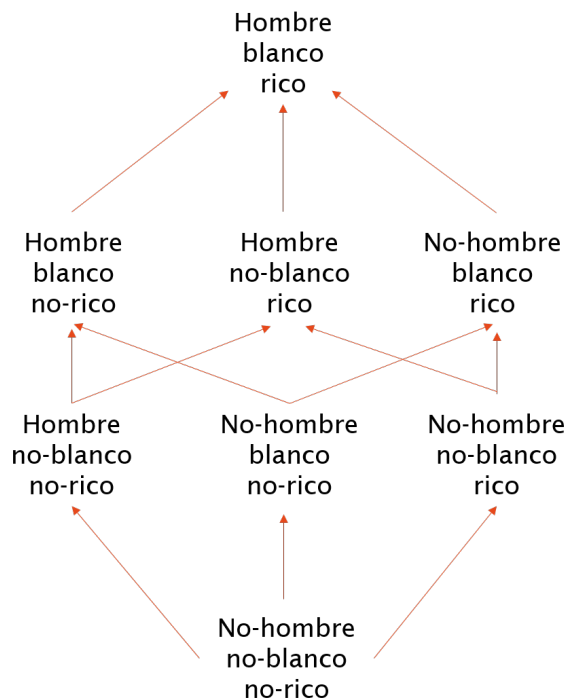


Figure 12: Diagrama de niveles de privilegio.

4 Definición de Categoría y Ejemplos

Llega el momento de construir un marco para pensar acerca de las relaciones, de establecer con precisión lo que entendemos por categoría. Para ello nos basaremos en algunas de las cosas que hemos visto, pero relajaremos más las propiedades que en el caso de las equivalencias o los órdenes. **Una categoría, que denotaremos por $\mathcal{C}$ se compone de tres bloques esenciales: datos, estructura y propiedades**, que analizamos en profundidad en los siguientes apartados.

4.1 Datos: elementos y relaciones

Los elementos de una categoría pueden ser lo que uno quiera, como números, personas, formas geométricas... De la misma forma que antes considerábamos un conjunto S de elementos, ahora denotaremos al conjunto de elementos de una categoría $\mathcal{C}$ por $\text{ob}\mathcal{C}$.

Por su parte, las relaciones van a ser vínculos entre objetos como los que hemos trabajado en las secciones anteriores, $\leq$, “es madre de”... pero hay un matiz, y es que no nos preguntamos únicamente si dos elementos están relacionados, sino de qué forma se relacionan. Si dos elementos a, b de $\text{ob}\mathcal{C}$ son tales que a está relacionado con b mediante una cierta relación f , escribiremos

$$a \xrightarrow{f} b$$

Naturalmente, puede haber más de una relación entre dos objetos, y pueden ir en ambas direcciones. El conjunto de las relaciones de un objeto a con un objeto b se denota por $\mathcal{C}(a, b)$, que no tiene por qué coincidir con el conjunto de las relaciones del objeto b con el objeto a , denotado $\mathcal{C}(b, a)$.

4.2 Estructura: lo que se puede hacer con los datos

Para asegurar que cierto conjunto de elementos $\text{ob}\mathcal{C}$ junto con todos los conjuntos de relaciones $\mathcal{C}(a, b)$ entre cada par de elementos a, b de $\text{ob}\mathcal{C}$ tiene la estructura de una categoría, necesitamos poder hacer dos cosas.

La primera de ellas está estrechamente relacionada con la reflexividad, y es que necesitamos que todo elemento tenga una relación consigo mismo. Formalmente, dado un elemento a de $\text{ob}\mathcal{C}$ existe una relación en el conjunto $\mathcal{C}(a, a)$ denominada **identidad** y denotada

$$a \xrightarrow{1_a} a$$

La segunda está estrechamente relacionada con la transitividad, y es que queremos poder enlazar relaciones. Al igual que con la transitividad, solo necesitamos especificar esto para cadenas de dos relaciones, pudiendo después construir cadenas tan largas como queramos. Formalmente, dados tres elementos a, b, c de $\text{ob}\mathcal{C}$ y dos relaciones f de $\mathcal{C}(a, b)$ y g de $\mathcal{C}(b, c)$ existe una relación en el conjunto $\mathcal{C}(a, c)$ denominada **composición** y denotada

$$a \xrightarrow{f} b \ \& \ b \xrightarrow{g} c \implies a \xrightarrow{g \circ f} c$$

Esta estructura deriva de las nociones de reflexividad y transitividad pero se diferencia de estas en que no estamos examinando la existencia de una relación que las cumpla, sino forzando la existencia de ciertas relaciones que las aseguren. Es decir

- En el caso de la identidad no estamos diciendo que haya una relación reflexiva en nuestra categoría, pues a puede relacionarse consigo mismo de una manera distinta a la que b se

relaciona consigo mismo. Simplemente especificamos que para cada elemento hay una relación de dicho elemento consigo mismo.

- En el caso de la transitividad no estamos diciendo que haya una relación transitiva en nuestra categoría, pues cierta relación entre a y b puede componerse con otra relación distinta entre b y c para dar lugar a una tercera relación entre a y c . Un ejemplo es el caso de las relaciones familiares. Las relaciones f = “es hermana de” y g = “es madre de” no son transitivas, pero pueden componerse para dar lugar a $g \circ f$ = “es tía de”.

4.3 Propiedades: condiciones en la estructura

Finalmente, para asegurar que la estructura creada en torno al conjunto de elementos y sus conjuntos de relaciones se comporta con sentido debemos imponer dos propiedades básicas.

La primera propiedad tiene que ver con las identidades. Si bien no sabemos exactamente a qué relación corresponde una identidad, sí sabemos que tiene que mantener el elemento sobre el que actúa inmutable, de forma que si componemos una identidad con cualquier otra relación el resultado sea el mismo que si solo hubiésemos tenido en cuenta esta segunda. Es decir

$$a \xrightarrow{1_a} a \ \& \ a \xrightarrow{f} b \implies a \xrightarrow{f \circ 1_a} b \text{ sea lo mismo que } a \xrightarrow{f} b$$

$$a \xrightarrow{f} b \ \& \ b \xrightarrow{1_b} b \implies a \xrightarrow{1_b \circ f} b \text{ sea lo mismo que } a \xrightarrow{f} b$$

Formalmente llamamos a esta propiedad **ley unitaria** y la expresamos como

$$f \circ 1_a = f = 1_b \circ f \text{ para cualesquiera } a, b \text{ de } \text{ob}\mathcal{C} \text{ y } f \text{ de } \mathcal{C}(a, b)$$

La segunda propiedad tiene que ver con la forma en que creamos cadenas de más de dos relaciones. Si bien no sabemos exactamente a qué relaciones corresponde cada cadena, sí sabemos que si creamos una cadena de tres relaciones a partir de dos cadenas de dos relaciones cada una el resultado debe ser el mismo independientemente del orden en que lo hagamos. Es decir,

$$a \xrightarrow{f} b \ \& \ b \xrightarrow{g} c \ \& \ c \xrightarrow{h} d \implies a \xrightarrow{g \circ f} c \ \& \ b \xrightarrow{h \circ g} d \implies a \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} d \text{ sea lo mismo que } a \xrightarrow{(h \circ g) \circ f} d$$

Formalmente llamamos a esta propiedad **asociatividad** y la expresamos como

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ para cualesquiera } f \text{ de } \mathcal{C}(a, b), g \text{ de } \mathcal{C}(b, c) \text{ y } h \text{ de } \mathcal{C}(c, d)$$

4.4 Ejemplos ya conocidos de Categorías

Puede que lo anterior, si bien tenga sentido y lógica, te parezca algo confuso. Es normal, porque por ahora únicamente hemos establecido la definición de categoría en abstracto. Explorar ejemplos de categorías nos va a ayudar a comprenderlas mejor. Sin embargo, todos los ejemplos que vamos a presentar ya los conoces, de modo que el conocimiento abstracto sobre las categorías nos va a ayudar a iluminar esos ejemplos y pensar en ellos de forma distinta.

“Un tour en helicóptero sobre una ciudad que conoces es divertido, pues puedes observar cómo diferentes partes de la ciudad se conectan desde una perspectiva más amplia. Sin embargo, un tour en helicóptero sobre una ciudad que no conoces también es divertido, pues puede inspirarte para después volver al suelo y explorar algunas partes de la ciudad que quizás no habrías visto de no haberla observado desde lo alto.”

4.4.1 Relaciones de Equivalencia

Hemos mencionado ya que las categorías se inspiran de alguna manera en las relaciones de equivalencia. La manera rigurosa en la que esto ocurre es que las relaciones de equivalencia son, de hecho, ejemplos de categorías. Piensa en una relación de equivalencia $\triangleright$ sobre un conjunto S y trata de identificar los datos, la estructura y las propiedades que hacen de ella una categoría $\mathcal{C}_\triangleright$.

Parece evidente que los elementos de la categoría $\mathcal{C}_\triangleright$ sean de hecho los elementos del conjunto S , es decir $\text{ob}\mathcal{C}_\triangleright = S$. Para las relaciones entre objetos, usaremos la relación de equivalencia $\triangleright$, estableciendo una relación $a \longrightarrow b$ entre dos elementos a, b de $\text{ob}\mathcal{C}_\triangleright = S$ siempre y cuando $a \triangleright b$. Notar que en este caso, el conjunto $\mathcal{C}_\triangleright(a, b)$ tiene como mucho un elemento, pues a lo sumo existe una flecha $a \longrightarrow b$.

¿Tiene $\mathcal{C}_\triangleright$ así definida la estructura de una categoría? Comprobemos que existen las identidades y la composición:

- Dado un elemento a de $\text{ob}\mathcal{C}_\triangleright = S$ necesitamos que exista una relación $a \longrightarrow a$. Esto es lo mismo que decir que necesitamos que $a \triangleright a$, lo cual es cierto porque $\triangleright$ es reflexiva al ser una relación de equivalencia.
- Dados tres elementos a, b, c de $\text{ob}\mathcal{C}_\triangleright = S$ y dos relaciones $a \longrightarrow b$ y $b \longrightarrow c$ necesitamos que exista una relación $a \longrightarrow c$. Esto es lo mismo que decir que si $a \triangleright b$ y $b \triangleright c$ necesitamos que $a \triangleright c$, lo cual es cierto porque $\triangleright$ es transitiva al ser una relación de equivalencia.

Vemos que la estructura de una categoría, la cual hemos inspirado en las propiedades de reflexividad y transitividad de las equivalencias, coincide exactamente con dichas propiedades en el caso de que la categoría en cuestión esté construida a partir de una equivalencia.

Finalmente, ¿cumple la estructura de $\mathcal{C}_\triangleright$ las propiedades de una categoría? En este caso no hay nada que comprobar, y la explicación es la siguiente: ambas propiedades se basan en el hecho de que dos flechas hipotéticamente distintas coincidan, pero el hecho de que aquí haya a lo sumo una flecha entre cada par de elementos garantiza esto directamente. Así pues, $\mathcal{C}_\triangleright$ es una categoría.

¿Y qué hay de la propiedad de simetría de las relaciones de equivalencia? Ahora que ya tenemos la categoría $\mathcal{C}_\triangleright$ traduzcámos la simetría a lenguaje de categorías: el hecho de que si $a \triangleright b$ entonces $b \triangleright a$ viene a decir que si existe una relación $a \longrightarrow b$ entonces también existe la relación $b \longrightarrow a$. Estas relaciones se dicen **inversas** la una de la otra. Es decir, **un conjunto con una equivalencia es una categoría en la que, entre cada par de elementos, o bien no hay flecha, o bien hay dos, inversas la una de la otra.**

Relación de equivalencia $\triangleright$			categoría $\mathcal{C}_\triangleright$	
DATOS	elementos	$--- \rightarrow$	elementos	DATOS
ESTRUCTURA	relaciones	$--- \rightarrow$	flechas	
PROPIEDADES	reflexividad	$--- \rightarrow$	identidades	ESTRUCTURA
	simetría	$--- \rightarrow$	inversas	
	transitividad	$--- \rightarrow$	composición	
			leyes unidad asociatividad	
				PROPIEDADES

Table 1: Relación de equivalencia $\triangleright$ vista como categoría $\mathcal{C}_\triangleright$.

Hemos visto que hay muchas relaciones interesantes que, pese a no ser equivalencias, mantienen algunas propiedades de estas. En efecto, las relaciones de orden también son ejemplos de categorías.

4.4.2 TOSETS: Conjuntos Totalmente Ordenados

Considera un TOSET S bajo la relación de orden total $\triangleright$ y trata de representarlo como una categoría $\mathcal{C}_{\triangleright}$. ¿Qué característica cumplen, a nivel de categoría, todos los TOSETS?

Es de nuevo evidente que los elementos de la categoría $\mathcal{C}_{\triangleright}$ son los elementos del conjunto S , es decir $\text{ob}\mathcal{C}_{\triangleright} = S$. Análogamente al desarrollo con las equivalencias, usaremos la relación, en este caso de orden, $\triangleright$ para establecer una relación $a \longrightarrow b$ entre dos elementos a, b de $\text{ob}\mathcal{C}_{\triangleright} = S$ siempre y cuando $a \triangleright b$. Notar que en este caso, los conjuntos $\mathcal{C}_{\triangleright}(a, b)$ y $\mathcal{C}_{\triangleright}(b, a)$ cumplen que uno tiene exactamente un elemento y el otro ninguno, pues la condición de tricotomía del orden total implica que siempre $a \triangleright b$ o $b \triangleright a$.

En cuanto a la estructura de la categoría, al igual que en el caso de las equivalencias, las identidades vienen dadas por la reflexividad de la relación de orden y la composición por la transitividad de la misma. En este caso, la antisimetría viene a decir que si existe una relación $a \longrightarrow b$ y también la relación $b \longrightarrow a$, necesariamente $a = b$ y dichas relaciones son la identidad sobre el objeto $a = b$, de modo que **ninguna relación tiene inversa**. De nuevo, las propiedades de leyes unidad y asociatividad son directas por haber una única flecha entre cada par de elementos.

En definitiva, se tiene que **un TOSET es una categoría en la que para cada par de elementos hay una única flecha entre ellos**.

4.4.3 POSETS: Conjuntos Parcialmente Ordenados

Acabamos de ver que un TOSET es una categoría con una única flecha entre cada par de elementos. Podemos intentar relajar esta condición “olvidando el detalle” de que haya exactamente una, diciendo que haya una como mucho. ¿Qué obtenemos entonces?

Seguimos teniendo un conjunto de elementos S de manera que entre cada par de elementos de S puede o no existir relación pero si existe es única. Es decir, hay una relación $\triangleright$ sobre S que no permite $a \triangleright b$ y $b \triangleright a$ a menos que $a = b$, de modo que es antisimétrica. Por tratarse de una categoría $\triangleright$ es además reflexiva y transitiva, así que es un orden. Puesto que precisamente se ha relajado la condición de tricotomía, se trata de un orden parcial, así que T es un POSET bajo la relación $\triangleright$.

En otras palabras, **un POSET es una categoría en la que para cada par de elementos hay a lo sumo una flecha entre ellos**.

Relación de orden (total) $\triangleright$			categoría $\mathcal{C}_{\triangleright}$	
DATOS	elementos	— — — $\rightarrow$	elementos	DATOS
ESTRUCTURA	relaciones	— — — $\rightarrow$	flechas	
PROPIEDADES	reflexividad	— — — $\rightarrow$	identidades	ESTRUCTURA
	antisimetría	— — — $\rightarrow$	no inversas	
	transitividad	— — — $\rightarrow$	composición	
	(tricotomía)	— — — $\rightarrow$	(flecha entre cada par)	
			leyes unidad asociatividad	PROPIEDADES

Table 2: Relación de orden (total) $\triangleright$ vista como categoría $\mathcal{C}_{\triangleright}$.

Los tres ejemplos anteriores son categorías cuyos elementos forman un conjunto, relacionándose por tanto mediante una única relación. Sin embargo, la categorías admiten definiciones más amplias. ¿Qué ocurre si cada elemento de la categoría fuese en sí misma un conjunto?

4.4.4 La Categoría *Set*

Dados dos conjuntos A y B , para establecer una relación f de A a B necesitamos establecer una relación de cada uno de los elementos de A con elementos de B , es decir, necesitamos una asignación

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \\ a \in A &\longmapsto f(a) \in B \end{aligned}$$

y esto no es sino una función $f : A \longrightarrow B$. Podemos pues pensar en una categoría donde los elementos sean conjuntos que estén relacionados entre sí mediante funciones. Ya tenemos los datos, veamos qué ocurre con la estructura y las propiedades:

- Dado un conjunto A , existe una **función identidad** $1_A : A \longrightarrow A$ que simplemente envía cada elemento a sí mismo, es decir $1_A(a) = a$ para cada a de A .
- Dados tres conjuntos A, B, C y dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, existe la **función compuesta** $g \circ f$ definida como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para cada a de A .

y se tiene que, dadas $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$,

$$\begin{aligned} f \circ 1_A : A &\longrightarrow B & 1_B \circ f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto (f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a) & a &\longmapsto (1_B \circ f)(a) = 1_B(f(a)) = f(a) \end{aligned}$$

esto es, $\mathbf{f} \circ \mathbf{1}_A = \mathbf{f} = \mathbf{1}_B \circ \mathbf{f}$, y

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) : A &\longrightarrow D & (h \circ g) \circ f : A &\longrightarrow D \\ a &\longmapsto (h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) & a &\longmapsto ((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) & &= h(g(f(a))) \end{aligned}$$

esto es, $\mathbf{h} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{f}) = (\mathbf{h} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{f}$

Se tiene por tanto, en efecto, una categoría, que denotamos por ***Set***.

4.4.5 La Categoría *POSet*

¿Qué ocurre en el caso de que los conjuntos que buscamos relacionar posean una estructura? Toma como ejemplo dos POSETs A y B , bajo relaciones de orden respectivas $\triangleright_A$ y $\triangleright_B$. Puesto que A y B son, en particular, conjuntos, podemos considerar una función cualquiera $f : A \longrightarrow B$ entre ellos, pero si queremos que dicha función simbolice una relación entre los conjuntos vistos como POSETs, necesitamos que dicha función f preserve la estructura, en este caso, el orden. Por ejemplo, si $A = B = \mathbb{Z}$ y $\triangleright_A = \triangleright_B = |$, si en A hay dos elementos a_1 y a_2 tales que $a_1 | a_2$, no tendría sentido establecer una relación de forma que $f(a_1) \nmid f(a_2)$. Así, en general, **una función $f : A \longrightarrow B$ que preserve la estructura de POSET** debe ser tal que para cada par de elementos a_1, a_2 de A

$$\text{si } a_1 \triangleright_A a_2, \text{ entonces } f(a_1) \triangleright_B f(a_2)$$

Retomando los ejemplos de POSETs correspondientes a los diagramas de factorización del 30 y el 42, podemos ahora tratar de construir una función entre ambos diagramas que preserve la estructura de POSET. Habría dos maneras lógicas de construir esta función:

$f : D30 \longrightarrow D42$	$g : D30 \longrightarrow D42$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$
$2 \mapsto 2$	$2 \mapsto 2$
$3 \mapsto 3$	$3 \mapsto 3$
$5 \mapsto 6$	$5 \mapsto 7$
$6 \mapsto 7$	$6 \mapsto 6$
$10 \mapsto 14$	$10 \mapsto 14$
$15 \mapsto 21$	$15 \mapsto 21$
$30 \mapsto 42$	$30 \mapsto 42$

La función f preserva el orden $\leq$, de forma que si dos divisores de 30 son tales que $a \leq b$, entonces $f(a) \leq f(b)$. Sin embargo, la estructura de POSETs de estos conjuntos se hace en base al orden de divisibilidad $|$, y f no lo preserva, pues por ejemplo $5|10$ pero $f(5) = 6 \nmid 14 = f(10)$. La función g sí preserva la estructura de POSET, de forma que si dos divisores de 30 son tales que $a|b$ entonces $f(a)|f(b)$. Esto explica formalmente el problema surgido en la Figura 11 al construir el diagrama del 42.

En el caso del diagrama de niveles de privilegio de la Figura 12, esto sugiere una reflexionar abstracta mucho más impactante: el hecho de que el 6 esté más arriba que el 7 a pesar de ser más pequeño se traduce al preservar el orden en que el hecho de ser hombre blanco sin ser rico está más alto que el ser rico pero no ser hombre ni blanco, pero muy probablemente una mujer negra con una riqueza lo suficientemente grande es mejor que un hombre blanco promedio. ¿Es entonces mejor tener un solo privilegio que dos? Depende, al igual que el 7 es mejor que el 6 si lo comparamos con el orden $\leq$ pero no lo es si lo comparamos con el orden de divisibilidad.

Volviendo a lo anterior, podemos construir una categoría cuyos elementos sean POSETs que están relacionados entre sí mediante funciones que preservan la estructura. Para asegurar que esto es una categoría, únicamente debemos comprobar que las funciones identidad y composición preservan la estructura, derivándose todo lo demás del trabajo ya hecho para conjuntos genéricos.

- Es evidente que la función identidad preserva la estructura, pues si dos elementos de un POSET A son tales que $a_1 \triangleright_A a_2$, se tiene que $1_A(a_1) = a_1 \triangleright_A a_2 = 1_A(a_2)$.
- Dados tres POSETs A, B, C y dos funciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ que preservan la estructura se tiene que si dos elementos de A son tales que $a_1 \triangleright_A a_2$, entonces $f(a_1) \triangleright_B f(a_2)$ y entonces $(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) \triangleright_C g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2)$, de modo que la composición preserva la estructura.

Se tiene por tanto, en efecto, una categoría, que denotamos por **POSet**.

Análogamente a lo anterior, podríamos pensar en establecer una categoría cuyos elementos fueran TOSETs, utilizando funciones que preserven la estructura de estos. Aquí no hay nada que comprobar, puesto que todo TOSET es en particular un POSET, de modo que tenemos una categoría **TOSet**, que es de hecho una subcategoría de **POSet**.

Estos nuevos ejemplos de categorías más amplias se basan en relaciones que representan cierto tipo de función que preserva una estructura. Pero esto no tiene por qué ser siempre así, para lo cual presentamos un ejemplo algo más sofisticado, pero muy interesante.

4.4.6 La Categoría *Mat*

La categoría ***Mat*** gira en torno al concepto de matriz. Puede que el instinto te lleve a pensar que se trata de una categoría cuyos elementos son las matrices, pero lo verdaderamente interesante surge cuando interpretamos las matrices como las flechas de la categoría. Más concretamente, considera como conjunto de elementos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, y define una flecha $a \longrightarrow b$ entre dos números naturales a y b como una matriz de dimensiones $a \times b$, esto es, a filas y b columnas. ¿Cómo se interpretan aquí la estructura y propiedades de una categoría?

- Dado un número natural a , debería existir una identidad $1_a : a \longrightarrow a$, esto es, una matriz de dimensiones $a \times a$. De hecho, existen infinitas matrices cuadradas de tamaño a , ¿cuál debería tomarse como la identidad? Parece lógico considerar, de hecho, la **matriz identidad de tamaño a** , es decir definir 1_a como la matriz

$$I_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Dados tres números naturales a, b, c y dos flechas $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$, esto es, dos matrices F y G de dimensiones $a \times b$ y $b \times c$, respectivamente, debería existir una flecha compuesta $g \circ f : a \longrightarrow c$, es decir, una matriz de dimensiones $a \times c$. Esto debería recordar al **producto de matrices**, por el cual dos matrices se pueden multiplicar siempre y cuando el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda, b ; y en cuyo caso la matriz resultante tiene tantas filas como la primera, a y tantas columnas como la segunda c . Parece lógico, pues, definir la composición de dos flechas en la categoría de matrices como el producto de las dos matrices que representan, esto es

$$g \circ f = F \cdot G$$

Con la estructura así definida, se cumplen las propiedades requeridas, pues dadas $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ y $h : c \longrightarrow d$, es decir, tres matrices F, G, H de tamaños $a \times b$, $b \times c$ y $c \times d$ respectivamente, se tiene que

$$f \circ 1_a \equiv I_a \cdot F = F \equiv f \quad \text{y} \quad 1_b \circ f \equiv F \cdot I_b = F \equiv f$$

en particular, tiene sentido multiplicar F a derecha de 1_a porque el número de filas de F es a , que coincide con el número de columnas de I_a . El resultado es una matriz de dimensiones $a \times b$, que es de hecho F , y análogamente con $F \times I_b$. Puesto que el producto de matrices es asociativo se cumple naturalmente que

$$h \circ (g \circ f) = (F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H) = (h \circ g) \circ f$$

La categoría ***Mat*** puede parecer extraña, pero hay una razón para definirla así que escapa el nivel de la sesión, y es que las matrices se utilizan para codificar aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. En este sentido, las matrices sí representan una cierta ‘función’ o relación, pero al codificarse en forma de matriz no lo vemos a simple vista.

Para poner el broche final a este “tour en helicóptero” vamos a tratar de ganar aún más altura. Hemos visto múltiples ejemplos de pequeñas categorías, como los conjuntos bajo cierta relación de equivalencia u orden; y también categorías más grandes formadas por la totalidad de esas estructuras, como **Set** o **POSet**. ¿Podríamos pensar en relacionar ahora dos de estas categorías grandes? ¿Podríamos construir una categoría cuyos elementos fueran categorías?

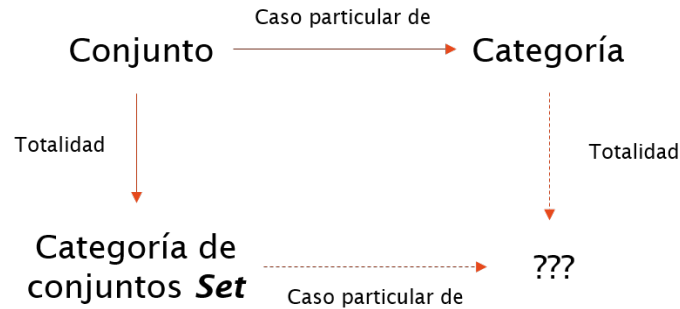


Figure 13: Idea para construir la categoría de las categorías.

4.4.7 La Categoría de las Categorías

La idea principal para la construcción de una categoría cuyos elementos sean categorías es la definición de una relación entre categorías, que naturalmente deberá preservar la estructura de las categorías que se relacionen. ¿Cómo podríamos hacer esto?

Considera dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Para definir una relación $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ necesitamos relacionar elementos y también flechas. En particular

- Para cada elemento x de $\text{ob}\mathcal{C}$ queremos un elemento $F(x)$ de $\text{ob}\mathcal{D}$.
- Para cada flecha $f : x \longrightarrow y$ de $\mathcal{C}(x, y)$ queremos una flecha $F(f) : F(x) \longrightarrow F(y)$ en $\mathcal{D}(F(x), F(y))$.

Quedarían así relacionados los datos de ambas categorías, pero hay que asegurar que se preserve la estructura, es decir, las identidades y la composición:

- Para cada elemento x de $\text{ob}\mathcal{C}$ se necesita que $F(1_x) = 1_{F(x)}$.
- Para cada trío de elementos x, y, z de $\text{ob}\mathcal{C}$ y par de flechas $f : x \longrightarrow y, g : y \longrightarrow z$ se necesita que $F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{D}} F(f)$

Una relación entre dos categorías que preserve su estructura se denomina **functor**. Considerando, pues, la totalidad de las categorías como conjunto de objetos y los funtores como conjunto de relaciones, obtenemos en efecto una categoría de categorías, denominada **Cat**.

Lógicamente, la categoría **Cat** tiene un ‘rango’ más alto que las categorías que contiene, y en ocasiones esto se denomina una 2–categoría. Puede que ya estés pensando en construir una 3–categoría que contenga todas las 2–categorías y relacione, además de los elementos y flechas de cada una, los funtores que las relacionan. Por supuesto, esto se puede hacer, ascendiendo en categorías de más y más dimensiones hasta el punto de llegar a una Teoría de Categorías de Dimensión Infinita. Esto es de hecho a lo que nos referíamos en la introducción con estudiar las relaciones entre elementos, las relaciones entre las relaciones, las relaciones entre las relaciones entre las relaciones...

5 Teoría de Categorías

Ahora que ya conocemos el concepto de categoría y lo hemos utilizado para explorar estructuras matemáticas ya conocidas vamos a construir la Teoría de Categorías. Esto significa que vamos a trabajar algunas propiedades interesantes de las categorías en abstracto, es decir, que sean válidas para cualquier categoría, en particular todas las que hemos visto anteriormente. Esta teoría es muy amplia y aquí únicamente vamos a presentar tres aspectos básicos. Para rebajar un poco la dificultad, trataremos de aterrizarlos en el ejemplo de los diagramas de factorización, para darles una interpretación matemática; y con ello en el de los niveles de privilegio, para darles una interpretación en términos de la vida.

5.1 Similaridad

La noción de similaridad es la que formaliza eso que venimos intentando hacer desde el inicio de la sesión de extender la noción de igualdad a casos más amplios. Cuando empezamos a trabajar las matemáticas, las cosas que intentamos comparar son números, y la idea de similaridad arranca con la igualdad y las ecuaciones. En la vida no todo es tan exacto. Por ir a un extremo, la igualdad entre personas es un principio de nuestra sociedad, pero bien sabemos que no hay dos personas iguales. Necesitamos algo más sutil que no exija que dos cosas sean exactamente iguales sino que encuentre un sentido en el que sean similares. Para ello te invito a pensar, en los siguientes casos, qué tienen en común ambas cosas y en qué se diferencian:

a) **$6 + 3$ y $8 + 1$**

Tenemos aquí dos formas distintas de obtener un mismo número, pues $6 + 3 = 8 + 1 = 9$. Más concretamente, ambas son sumas de dos términos que dan como resultado 9, si bien los sumandos son distintos.

b) **$4 + 1$ y $1 + 4$**

Tenemos de nuevo dos formas distintas de obtener un mismo número, pues $1 + 4 = 4 + 1 = 5$. Aquí la similaridad va más allá, pues ambas son sumas de los dos mismos términos que dan como resultado 5, pero son distintas en el orden en que se suman los términos.

c) **$-(-4)$ y $1/\frac{1}{4}$**

Tenemos una vez más dos formas distintas de obtener un mismo número, pues $-(-4) = 1/\frac{1}{4} = 4$. Aquí la similaridad se encuentra en el hecho de que ambas obtienen el mismo resultado como “el inverso del inverso”, en el primer caso el aditivo y en el segundo el multiplicativo.

d) **$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ y $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$**

En este caso la similaridad reside en el hecho de que ambas expresiones muestran una factorización en primos que da lugar a 12, y tan solo se diferencian en el orden. El Teorema Fundamental de la Aritmética nos dice que cualquier número se puede factorizar en primos de manera única, y esto es cierto porque el orden de los factores no altera el producto, de manera que a efectos prácticos las dos expresiones son ‘la misma’.

e) **“La pandemia del COVID-19” y “Un meme que se hace viral”**

Nadie dudará en decir que ambas cosas son muy distintas, en contenido y en importancia. Matemáticamente, ambas cosas son muy similares en el sentido de que se modelan de la misma forma: una persona se contagia/recibe el meme y de media contagia a/lo comparte con R personas, y cada una de ellas con otras R , dando lugar a una ecuación exponencial denominada ecuación logística. Esta es la razón por la que nos referimos a la gran difusión de un meme como un contenido “viral”.

A menudo el estudio de la similaridad pasa por establecer conexiones entre elementos que existen en dos conjuntos o dos categorías y cumplen ciertas propiedades dentro de estas. En Teoría de Categorías estas se llaman **propiedades universales**.

5.2 Elementos iniciales y terminales

Una de las propiedades universales más básicas e interesantes es el extremismo. Nos referimos a buscar, de entre ciertos elementos que juegan un mismo papel en un contexto, el más extremo. Es el caso del mínimo común múltiplo, el más pequeño o extremo inferior de todos los múltiplos comunes. Buscar extremidades nos ayuda a examinar el funcionamiento interno de una situación y establecer comparaciones.

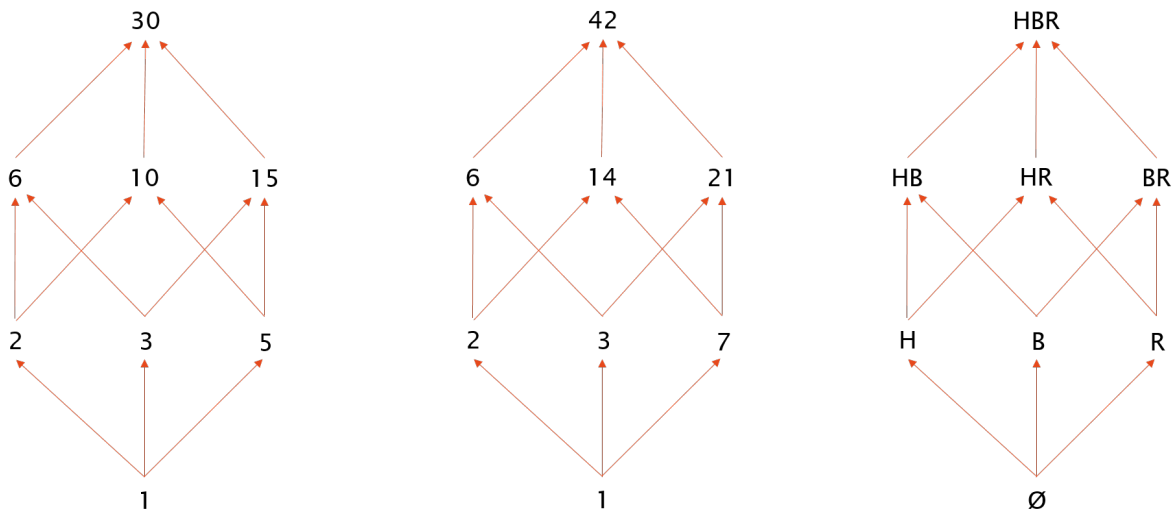


Figure 14: Diagramas de factorización del 30 y el 42 y diagrama de niveles de privilegio.

Por ejemplo, en los diagramas de factorización del 30 y el 42, estos números ocupan un lugar extremo análogo, compartido también por “hombres blancos ricos” en el diagrama de niveles de privilegio. Podríamos definir dicho extremo como estar lo más arriba posible del diagrama, pero esto depende de la manera en la que lo hemos dibujado. En una categoría es mejor definir los conceptos en términos de las flechas, en este caso son los elementos en los que únicamente entran flechas, sin salir ninguna. Por el contrario hay unos elementos de los que solamente salen flechas, sin entrar ninguna, el 1 en los dos primeros casos y “no-hombres no-blancos no-ricos” en el tercero.

En Teoría de Categorías **un elemento t de una categoría $\mathcal{C}$ se denomina terminal** si para cada objeto x de $\mathcal{C}$ existe una “única” flecha $x \rightarrow t$, y **un elemento i de una categoría $\mathcal{C}$ se denomina inicial** si para cada objeto x de $\mathcal{C}$ existe una “única” flecha $i \rightarrow x$.

Así, en el diagrama de factorización del 30 hay un único objeto terminal, que es el propio 30, y un único objeto inicial, que es el 1. Podría parecer que hay más de una flecha que va del 5 al 30, por ejemplo, pues podemos ir via el 10 o via el 15, pero puesto que ambas conmutan podemos considerarlas “la misma”. De ahí que en la definición anterior diga “única” flecha. Más concretamente, la flecha es única, si bien puede representarse como composición de flechas de varias formas distintas. Un ejemplo más de cómo se manifiesta la similaridad en las categorías.

Por supuesto, la propiedad de objeto inicial o terminal depende del contexto en el que nos encontremos. El 30 es un elemento terminal en el diagrama de factorización del 30, mientras que no lo sería si consideramos el diagrama de factorización del 60, por ejemplo. El 1, por su parte, sigue siendo inicial en todos los diagramas de factorización. Un ejemplo de cambio de contexto lo encontramos en el diagrama de niveles de privilegio, donde “hombre blanco rico” sería un elemento terminal. Si restringimos el contexto a mujeres y consideramos los privilegios “rica”, “blanca” y “cis-género”, vemos como el elemento “rica blanca cis-género” es terminal en esta nueva categoría, mientras que su análogo en la anterior categoría “no-hombre blanco rico” no estaba en lo más alto del diagrama.

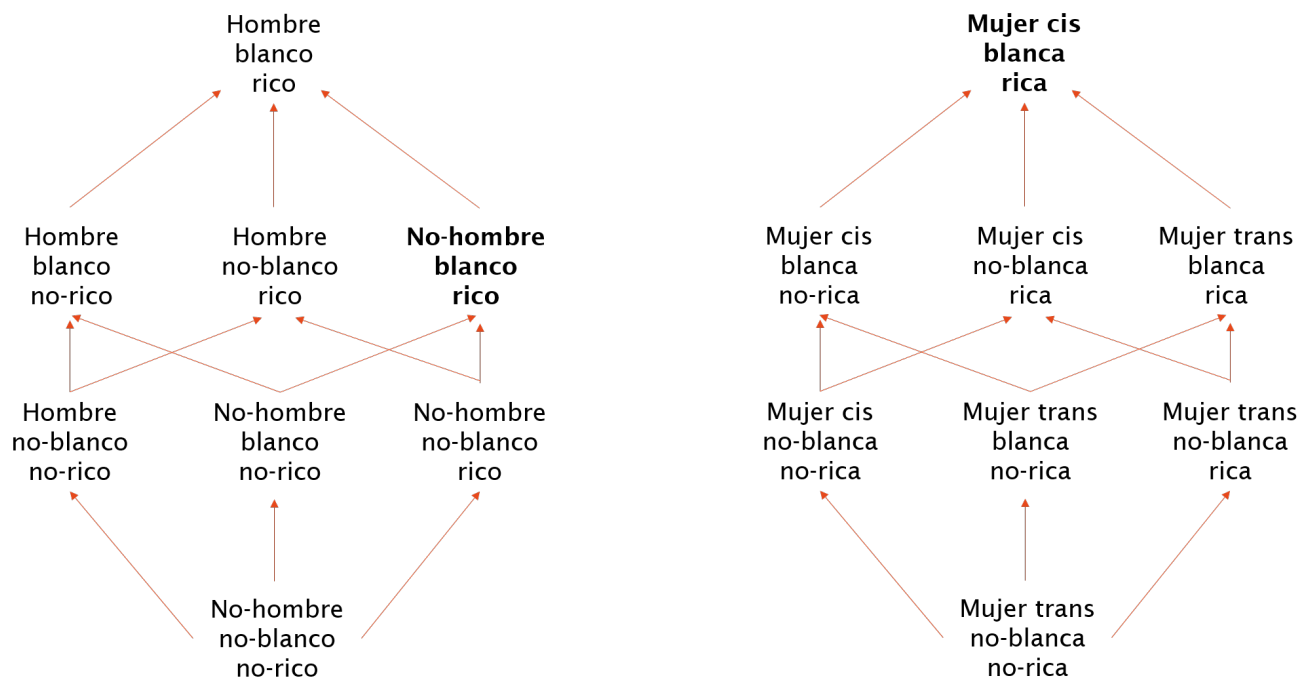


Figure 15: Diagramas de niveles de privilegio con diferente contexto.

Este ejemplo puede ayudarnos a entender por qué hay en ocasiones enfados contra las mujeres blancas en algunas partes del movimiento feminista, pues solo se piensa en el primer diagrama, lo cual es especialmente cierto si tienden a juntarse solo con personas blancas, olvidando entonces lo privilegiadas que son en relación al resto de mujeres. La Teoría de Categorías va no únicamente de expresar ciertas estructuras como categorías, sino de moverse entre ellas para observar diferentes puntos de vista, y es ahí donde entra en juego la categoría **Cat** y los funtores. En particular, se estudian características de los funtores como el hecho de preservar o no propiedades universales como la inicialidad o terminalidad, esto es, si empezamos con un objeto inicial en cierta categoría y le aplicamos un functor, ¿el resultado será inicial en la nueva categoría?

En definitiva, la Teoría de Categorías busca establecer propiedades universales que tengan una lógica interna, que sirvan para un cierto propósito, y por encima de todo que surgen naturalmente de las fuertes raíces de los principios matemáticos abstractos. En este sentido, la idea de similaridad con la que abríamos esta última sección se extiende a encontrar similaridades entre categorías diferentes, lo cual se traduce en la noción de isomorfismo de categorías.

5.3 Isomorfismos

Se ha presentado la noción de functor como la manera de relacionar una categoría $\mathcal{C}$ con otra $\mathcal{D}$

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

La idea es entonces usar los funtores como medio para establecer una similaridad entre dos categorías. Para ello es necesario que la categoría $\mathcal{D}$ esté a su vez relacionada con la categoría $\mathcal{C}$ mediante un segundo functor

$$\mathcal{D} \xrightarrow{F^{-1}} \mathcal{C}$$

de forma que F^{-1} sea el functor inverso de F , entendido esto de forma que si se aplica F y después F^{-1} es como si no hubiéramos hecho nada, y análogamente si se aplica F^{-1} y después F . En caso de que esto ocurra, los funtores F y F^{-1} se denominan **isomorfismos** de categorías, inversos el uno del otro, y **las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen isomorfas $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$** . En la práctica esto significa que tienen la misma estructura, simplemente tienen nombres distintos para sus elementos y flechas.

El ejemplo más claro de esto lo encontramos al intentar comparar las categorías de factorización del 30 y el 42. A simple vista vemos que tienen la misma estructura pero cambian los números en cuestión, de modo que debe existir un par de isomorfismos F y F^{-1} que formalicen la isomorfía de estas categorías. En primer lugar, los funtores en cuestión deberán establecer una correspondencia entre los elementos, es decir, unas funciones que relacionen. Hay varias opciones lógicas, en particular las dos funciones f y g que hemos visto en el apartado 4.4.5.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CD}30 & \xleftarrow{F} & \mathcal{CD}42 \\ D30 & \xleftarrow{f} & D42 \\ \vdots & & \vdots \\ 5 & \longleftrightarrow & 6 \\ 6 & \longleftrightarrow & 7 \\ 10 & \longleftrightarrow & 14 \\ \vdots & & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{CD}30 & \xleftarrow{G} & \mathcal{CD}42 \\ D30 & \xleftarrow{g} & D42 \\ \vdots & & \vdots \\ 5 & \longleftrightarrow & 7 \\ 6 & \longleftrightarrow & 6 \\ 10 & \longleftrightarrow & 14 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ambas emparejan cada elemento de una categoría con un único elemento de la otra produciendo una correspondencia inequívoca y de forma que si se aplica una y luego su inversa o viceversa volvemos a donde estábamos. Sin embargo, no ambas dan lugar a funtores válidos, pues cuando examinamos la acción de F y F^{-1} sobre las flechas de las categorías surgen problemas como

$$F(5 \xrightarrow{\cdot 2} 10) = 6 \xrightarrow{?} 14$$

En la segunda todas las flechas de $\mathcal{CD}30$ tienen una correspondencia inequívoca con las flechas de $\mathcal{CD}42$ de forma que si se aplica G y luego G^{-1} o viceversa volvemos al inicio. Por ejemplo

$$G(5 \xrightarrow{\cdot 2} 10) = 7 \xrightarrow{\cdot 2} 14 \qquad \text{y} \qquad G^{-1}(7 \xrightarrow{\cdot 2} 14) = 5 \xrightarrow{\cdot 2} 10$$

La noción de isomorfismos de categorías añade un nuevo nivel de formalización a la similitud que desde el inicio hemos observado entre ambos diagramas, además de a la explicación de la dificultad surgida para construir el segundo en comparación al primero, que aquí reside en la correcta construcción de los funtores isomorfismo.

Análogamente encontramos un isomorfismo entre las dos categorías de privilegio de la Figura 15, lo cual nos dice qué elementos tienen papeles análogos y cuáles no en ambos contextos.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &\xleftrightarrow{F} \mathcal{D} \\
 \emptyset &\longleftrightarrow \emptyset \\
 H &\longleftrightarrow C \\
 B &\longleftrightarrow B \\
 R &\longleftrightarrow R \\
 HB &\longleftrightarrow CB \\
 HR &\longleftrightarrow CR \\
 \mathbf{BR} &\longleftrightarrow \mathbf{BR} \\
 HBR &\longleftrightarrow CBR
 \end{aligned}$$

En particular vemos esa idea que mencionábamos antes de que las mujeres cis, blancas y ricas tienen un rol dentro del conjunto de mujeres análogo al que los hombres blancos y ricos tienen en la sociedad general. Además, encontramos numerosas subcategorías isomorfas conformadas por dos elementos y una flecha que representan la relación de poder estructural entre dos grupos.

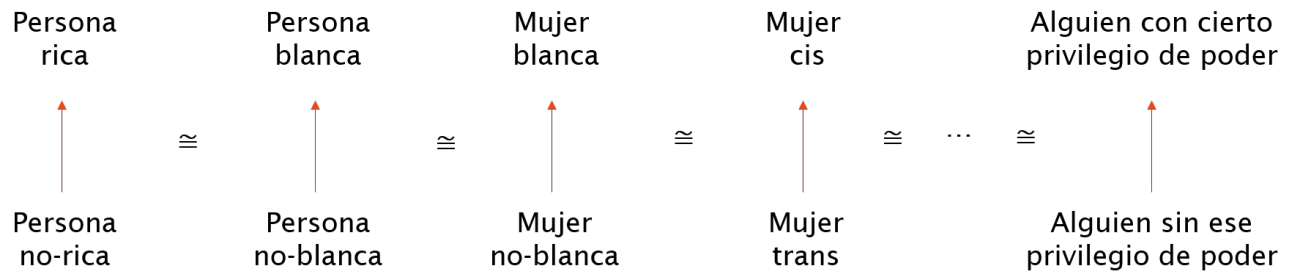


Figure 16: Isomorfismos entre categorías de dos elementos y una flecha que representan privilegios sociales.

A la hora de establecer los isomorfismos es muy importante el sentido en el que van las flechas. Por ejemplo, las siguientes categorías no son isomorfas

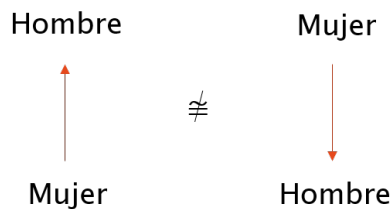


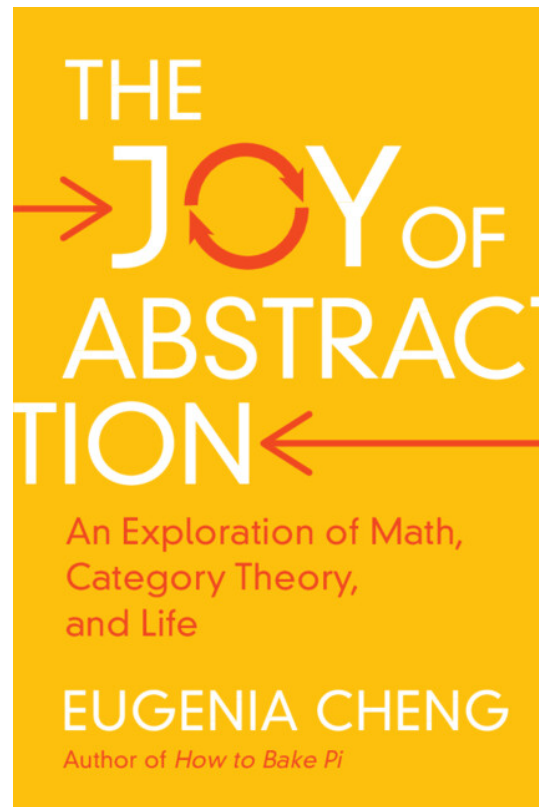
Figure 17: Dos categorías de dos elementos y una flecha que representan privilegios sociales pero no son isomorfas.

pues si se considera un functor tal que $F(\text{Hombre}) = \text{Mujer}$ y $F(\text{Mujer}) = \text{Hombre}$ se tendría de nuevo un problema al intentar definir la imagen de la flecha $F(\text{Mujer} \rightarrow \text{Hombre}) = \text{Hombre} \xrightarrow{?} \text{Mujer}$. Esta podría ser una explicación abstracta a los desacuerdos que surgen cuando la gente protesta por los abusos sexuales de hombres a mujeres y alguien dice “las mujeres también abusan de los hombres”. No es que no sea cierto, pero hay una diferencia estructural cuando se trata de un grupo de la población que tiene un poder social sobre el otro.

La Teoría de Categorías es una rama muy reciente de las matemáticas, comenzando a formalizarse a mediados del siglo XX. Es por ello que, aunque sus fundamentos están muy instaurados, hoy en día continúa investigándose mucho sobre ella, especialmente en dimensiones altas e incluso infinitas, donde aparecen dificultades por la sutileza de las relaciones que se estudian y por lo inherente a representar dichas estructuras en un mundo tridimensional.

Como se ha venido mostrando aquí, el propósito de esto es subir cada vez más alto para ganar perspectiva y contexto. Ganamos la oportunidad de unificar una gran variedad de estructuras y observar conexiones entre áreas muy diferentes. Pero también perdemos detalles. Encontrar un equilibrio entre estas dos cosas es esencial cuando hablamos de abstracción, y en ese sentido la Teoría de Categorías básica, unidimensional, funciona muy adecuadamente como bien hemos visto.

Seguir ahondando en dimensiones infinitas tiene otro atractivo, y es que constituye un punto fijo de la abstracción. Si la ciencia es la teoría de la vida, las matemáticas son la teoría de la ciencia y la Teoría de Categorías es la teoría de las matemáticas, entonces la Teoría de 2-Categorías es la teoría de la Teoría de Categorías, la Teoría de 3-Categorías es la teoría de la Teoría de 2-Categorías, y así sucesivamente. Finalmente, sin embargo, la Teoría de Categorías de Dimensión Infinita es la teoría de ella misma, habiendo alcanzado la cumbre de la abstracción, o quizás sus raíces. “Puede que la cumbre y las raíces sean en este caso lo mismo, y ese es el encanto de la abstracción”.



No podía terminar sin reconocer y agradecer la autoría de lo aquí expuesto a Eugenia Cheng y su libro *The Joy of Abstraction*, donde puedes continuar aprendiendo más ejemplos de estructuras matemáticas que funcionan como categorías, más propiedades universales de las categorías, más características de los funtores y categorías de dimensiones más altas, y sobre todo muchas más perspectivas acerca de la sociedad y la vida.