

Poliedros sin agujeros y con agujeros

Vivir en una esfera o en un flotador

TTM

Paz Jiménez Seral
profesora de álgebra en la Universidad de Zaragoza

13 de marzo de 2026



Universidad
Zaragoza

Seguro que sabes qué es un poliedro.

- sus caras son los polígonos que forman su superficie.
- sus aristas son segmentos, son los lados de las caras. Cada arista hace frontera de dos caras.
- sus vértices son los puntos extremos de las aristas. En cada vértice concurren tres o más caras.
- un poliedro parte al espacio en dos regiones espaciales, que son la de dentro y la de fuera
- poliedro viene del griego [muchos+ cara]



Tipos de poliedros

- **convexo:** cualquier par de puntos en su interior determinan un segmento que está también interior.
Está incluido en semiespacios de borde el plano que contiene a una de sus caras.
- **cóncavo:** los que no son convexos

1750 Leonhard Euler

- teorema de poliedros: relación entre el número de caras, aristas y vértices.
- poliedros simple (sin orificios). No importa convexo o no.
- sólo pueden ser cinco los sólidos regulares.



Tipos de poliedros

- **convexo:** cualquier par de puntos en su interior determinan un segmento que está también interior.
Está incluido en semiespacios de borde el plano que contiene a una de sus caras.
- **cóncavo:** los que no son convexos

1750 Leonhard Euler

- teorema de poliedros: relación entre el número de caras, aristas y vértices.
- poliedros simple (sin orificios). No importa convexo o no.
- sólo pueden ser cinco los sólidos regulares.



¿Qué quiere decir poliedro sin orificios?

Es el que podría hincharse o deformarse (si el material lo permitiera) hasta formar una esfera.

¿Qué quiere decir poliedro con orificios?

Es el que podría hincharse o deformarse (si el material lo permitiera) hasta formar por ejemplo un flotador o rosquilla.

Imagina poliedros tipo esfera, sin orificios y poliedros tipo flotador



Fórmula de EULER

- C = número de caras
- V = número de vértices
- A = número de aristas

$$C + V = A + 2$$

Sólo sirve cuando no hay orificios

¿Y si hay h orificios?, imagina 5 rosquillas que se han pegado una a otra formando una especie de cadena.

$$C + V = A + 2 - 2h$$



Fórmula de EULER

- C = número de caras
- V = número de vértices
- A = número de aristas

$$C + V = A + 2$$

Sólo sirve cuando no hay orificios

¿Y si hay h orificios?, imagina 5 rosquillas que se han pegado una a otra formando una especie de cadena.

$$C + V = A + 2 - 2h$$



Fórmula de EULER

- C = número de caras
- V = número de vértices
- A = número de aristas

$$C + V = A + 2$$

Sólo sirve cuando no hay orificios

¿Y si hay h orificios?, imagina 5 rosquillas que se han pegado una a otra formando una especie de cadena.

$$C + V = A + 2 - 2h$$



Qué tiene de diferente una esfera de un flotador

Vivimos en una esfera ¿has pensado qué ocurriría si vivieses en un flotador?

Imagina que los puntos se pueden separar y juntar, moverse, sin saltar unos por encima de otros.

ESFERA

- dos puntos de la superficie se pueden unir por una línea sobre la superficie que llamaremos camino (conexo).
- cualquier línea de la superficie que sale de un punto y vuelve al mismo (lazo), divide la superficie en regiones tales que para pasar de una a otra hay que atravesar la línea. (simple)
- un camino sin lazos no divide la superficie en regiones es decir podemos pasar de un punto a otro cualquiera sin cruzar el camino.
- dos caminos sin puntos comunes se pueden unir en uno solo.

Qué tiene de diferente una esfera de un flotador

Vivimos en una esfera ¿has pensado qué ocurriría si vivieses en un flotador?

Imagina que los puntos se pueden separar y juntar, moverse, sin saltar unos por encima de otros.

ESFERA

- dos puntos de la superficie se pueden unir por una línea sobre la superficie que llamaremos camino (conexo).
- cualquier línea de la superficie que sale de un punto y vuelve al mismo (lazo), divide la superficie en regiones tales que para pasar de una a otra hay que atravesar la línea. (simple)
- un camino sin lazos no divide la superficie en regiones es decir podemos pasar de un punto a otro cualquiera sin cruzar el camino.
- dos caminos sin puntos comunes se pueden unir en uno solo.

Demostración

hinchas el poliedro hasta parecerse a una esfera donde quedan dibujados los vértices y las aristas (algo deformadas pero las podemos seguir contando).

- Imaginemos el poliedro como un planeta con gravedad hacia el interior. Imaginemos las aristas como grandes muros, diques de contención de aguas y que una de las caras es un mar agitado e impetuoso.
- Supongamos que vamos destruyendo diques uno tras otro, inundando caras y sin destruir diques de manera superflua (si destruimos un dique es para inundar una cara).

Afirmación: se pueden llegar a inundar todas las caras y tenemos así destruidos $c-1$ diques



Sigue la demostración

Entre dos vértices siempre hay un camino seco de diques sin destruir por el que poder andar.

Supongamos que ya toda la superficie está unida por las aguas, se puede pasar de un punto a otro por el agua sin diques que estorben. Mira un vértice concreto P.

Recuerda que puedes unir dos puntos cualesquiera por una línea que no atraviesa diques sin destruir.

Si entre dos vértices concretos no existe un camino seco y lo reconstruimos, sigue habiendo paso por el agua entre dos puntos cualesquiera de la superficie. En este caso habríamos destruido diques de manera superflua pues con menos seguimos teniendo inundadas todas las caras.



Entre dos vértices el camino seco de diques sin destruir por el que poder andar es único.

Si hubiese dos caminos, la superficie encerrada entre los dos no se habría inundado de agua.

Ahora nos fijamos en un vértice concreto P y a cada vértice Q distinto de P le asociamos el dique que llega a Q en el camino seco de P a Q . Tenemos emparejados los vértices distintos de P y los diques secos. (Notar que un mismo dique no puede estar asociado a los dos vértices que une y que todos los diques están asociados a alguno de los vértices que une)

Conclusión: El número de diques A es igual al número de diques destruidos $C-1$ más el número de diques secos $V-1$ y de aquí se deduce que $A=C-1+V-1$ y por tanto $C + V = A + 2$



Otra demostración (internet)

Dice que la idea es sencilla pero . . . Y si tiene orificios qué falla

Convertimos el poliedro en uno con todas sus **caras son triángulos**, agregando aristas a las caras. Agregar una arista a una cara agrega también una nueva cara con lo cual la suma $V-A+C$ no se altera.

Quitamos una de las caras y la suma $V-A+C$ disminuye en uno pues no se quita ningún vértice y ninguna arista.

Seguimos **quitando triángulos** de la orilla, es decir, que tengan alguna arista libre. Si quitas un triángulo que tiene una sola arista libre entonces quitas sólo una arista y una cara, con lo cual la suma $V-A+C$ no se altera. Si quitamos un triángulo que tiene dos aristas libres entonces desaparecen al mismo tiempo un vértice y una cara con lo cual la suma $V-A+C$ tampoco se altera. Así hasta que queda un solo triángulo y es obvio que $V-A+C=1$, y si sumamos la cara que quitamos al comenzar nos queda que $V-A+C=2$



sólidos platónicos o poliedros regulares

sólidos cuyas caras son polígonos regulares, todas ellas iguales.

Existen cinco (ni uno más ni uno menos

tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro y icosaedro.

Cada uno de los cinco es una maravilla, que queda empequeñecida ante la magnificencia de la demostración de que estos son todos los poliedros regulares.



sólidos platónicos o poliedros regulares

sólidos cuyas caras son polígonos regulares, todas ellas iguales.

Existen cinco (ni uno más ni uno menos

tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro y icosaedro.

Cada uno de los cinco es una maravilla, que queda empequeñecida ante la magnificencia de la demostración de que estos son todos los poliedros regulares.



Caras polígonos regulares de $p > 2$ lados $q > 2$ aristas en cada vértice

Supongamos que existe un poliedro regular así

C caras, V vértices y A aristas

En cada cara hay p aristas y cada arista está en dos caras, luego

$$2A = pC$$

En cada arista hay dos vértices y cada vértice está en q aristas, luego

$$2A = qV$$

Aplicando la fórmula de Euler

$$2 = V - A + C = V - qV/2 + qV/p = (V/2p)(2p - pq + 2q)$$

Así $V = 4p/(2p - pq + 2q)$, $A = qV/2$, $C = qV/p$



No hay más de 5 poliedros regulares

$$2 = (V/2p)(2p - pq + 2q) = (V/2p)(4 - (p - 2)(q - 2))$$

y recordando que las letras representan números enteros positivos, obtenemos

$$(p - 2)(q - 2) < 4$$

y de aquí los únicos valores posibles son los de la tabla.

- $p = 3, q = 3, V = 4, A = 6, C = 4$ tetraedro regular.
- $p = 3, q = 4, V = 6, A = 12, C = 8$ octaedro regular.
- $p = 3, q = 5, V = 12, A = 30, C = 20$ icosaedro regular.
- $p = 4, q = 3, V = 8, A = 12, C = 6$ cubo.
- $p = 5, q = 3, V = 20, A = 30, C = 12$ dodecaedro regular.



Y dice uno en la red

Esta demostración es (según mi humilde entender) una de las más bonitas cosas que los matemáticos hayan realizado nunca. No en vano, el propio Carl Sagan no pudo resistirse, y en las últimas páginas de su best seller Cosmos incluyó la demostración . Hizo bien. Incluyó también la demostración de que la raíz cuadrada de dos es un número irracional, algo de importancia imposible de calibrar si uno no sabe previamente el horror que tal hecho causaba a los griegos, pero esa es otra historia.



El poliedro de Szilassi (1977)

puede existir algún poliedro, además del tetraedro (regular o no) tal que cualquier par de caras tengan una arista en común

- El tetraedro lo cumple
- Con la fórmula de Euler se prueba que no puede ser sin orificios
- Con la fórmula de Euler se prueba que podría ser con un orificio.
- Lajos Szilassi presentó la joya, que existe.
- Tiene 7 caras hexagonales , 21 aristas y 14 vertices



tendría que tener un agujero

$$A = \frac{C(C-1)}{2} \quad V \leq \frac{2A}{3}$$

$$2 = C - A + V = C - \frac{C(C-1)}{2} + V \leq C - \frac{C(C-1)}{2} + \frac{C(C-1)}{3}$$

$$2 \leq \frac{6C - C(C-1)}{6} = \frac{C(7-C)}{6}$$

La única posibilidad es $C = 4$

Con un agujero

$$0 \leq \frac{C(7-C)}{6}$$



Garcias por la atención. Preguntas

paz@unizar.es



Universidad
Zaragoza