

La inversión como estrategia de resolución de problemas

Juan Ángel Serrano de Rodrigo

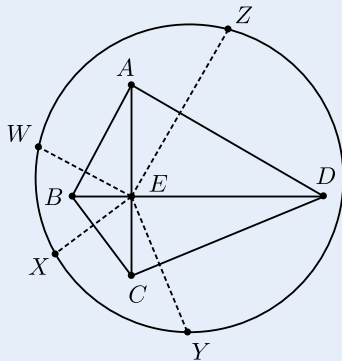
Departamento de Educación – Gobierno de Navarra

Zaragoza, 7 de noviembre de 2025

- 1 Para empezar... Un problema
- 2 Inversión en el plano
- 3 Propiedades de la inversión
- 4 De nuevo el problema
- 5 Resolución del problema
- 6 Algunos problemas más
- 7 ¿Cuándo invertir?

Problema (USAMO 1993/2).

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cuyas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares y se cortan en E . Demuestra que los puntos simétricos de E respecto de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ son cocíclicos.

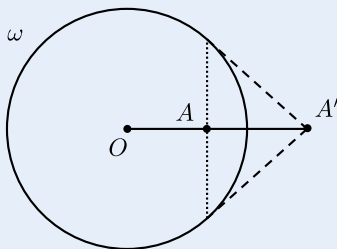


Inversión

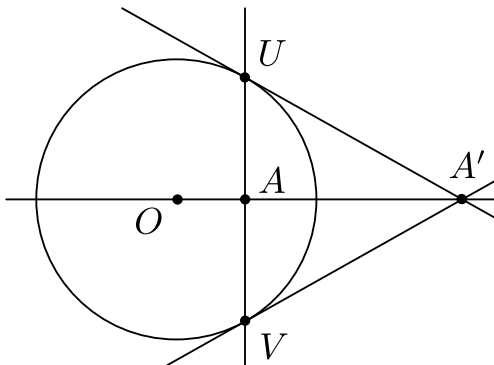
Sea ω una circunferencia con centro O y radio r . una **inversión** respecto a ω es una transformación cumpliendo:

- El centro O de la circunferencia se envía a P_{∞} .
- El punto P_{∞} se envía a O .
- Cualquier otro punto A se envía al punto A' sobre OA tal que

$$OA \cdot OA' = r^2.$$



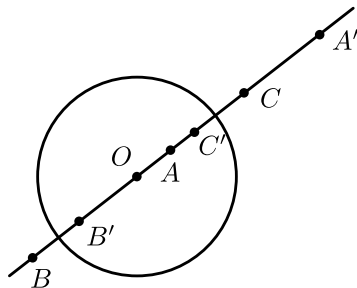
Un punto $A \in \omega$ si y sólo si $A = A'$. En general, $(A')' = A$.



Propiedad 2.

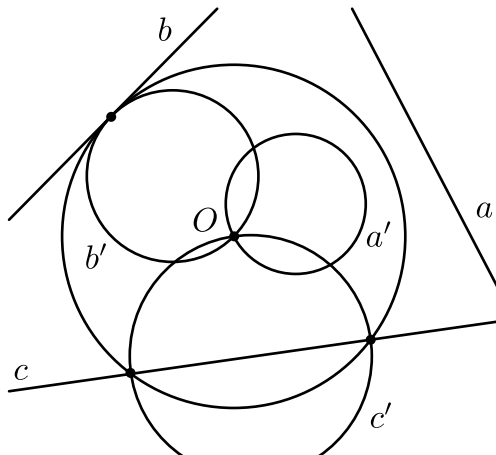
Una recta que pasa por O se transforma por inversión en la misma recta

Nota: no punto a punto.



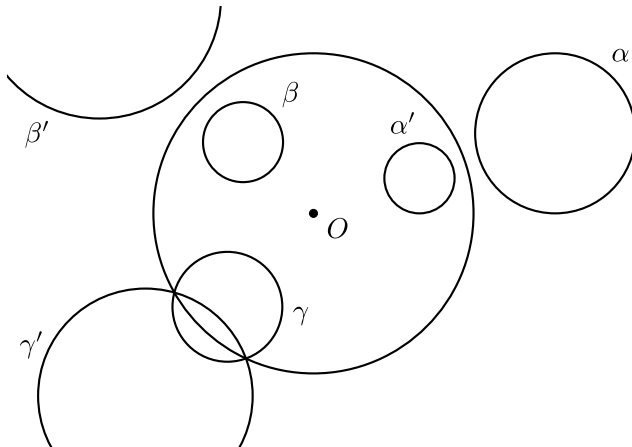
Propiedad 3.

El inverso de una recta a que no pasa por O es una circunferencia a' que pasa por O . Además, la recta por O perpendicular a a pasa por el centro de a' . El recíproco también se cumple.



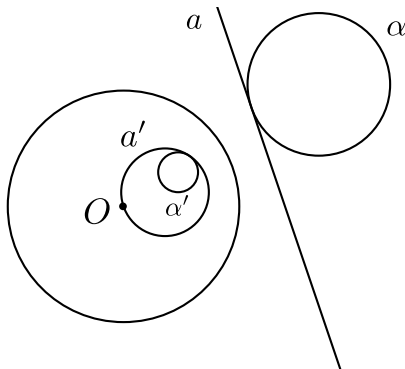
Propiedad 4.

El inverso de una circunferencia α que no pasa por O es otra circunferencia α' que tampoco pasa por O .



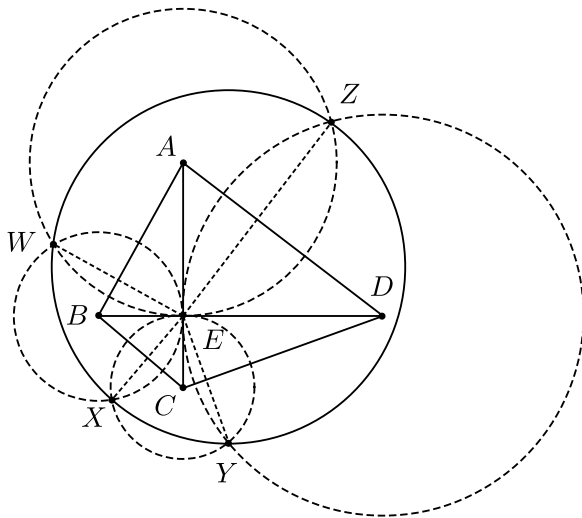
Propiedad 5.

La inversión preserva tangencias e intersecciones.



Nota: Si una circunferencia α se transforma en α' , el inverso del centro de α **no** es, en general, el centro de α' .

- ¿Dónde están las circunferencias?
- $AW = AE = AZ$.

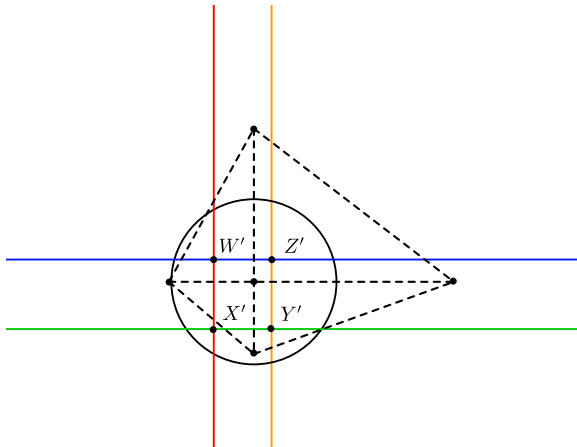


- 1 Sea $ABCD$ un cuadrilátero con diagonales perpendiculares en E .
- 2 Sea ω_A una circunferencia con centro en A que pasa por E .
- 3 Se definen análogamente ω_B , ω_C , ω_D .
- 4 Sea W la intersección de ω_A y ω_E distinta de E .
- 5 Se definen análogamente X , Y , Z .
- 6 Probar que $WXYZ$ es cíclico.

Recordar

La inversión permite transformar circunferencias en rectas.

Invertimos respecto a una circunferencia centrada en E de radio 1.



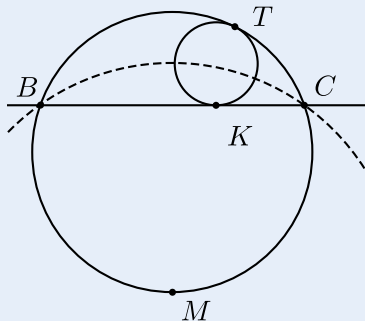
- $WXYZ$ es cíclico $\iff W'X'Y'Z'$ es cíclico.
- ¡Pero $W'X'Y'Z'$ es un rectángulo, así que es obviamente cíclico!

Demostración.

- Definimos las circunferencias ω_A , ω_B , ω_C , ω_D con centros A , B , C , D que pasan por E .
 - Los puntos W , X , Y , Z son las segundas intersecciones de ω_A y ω_B , etc.
 - Consideramos una inversión con centro E . Dicha inversión transforma ω_A , ω_B , ω_C , ω_D en cuatro rectas que son los lados de un rectángulo.
 - Las imágenes de W , X , Y , Z forman un rectángulo, que en particular es cíclico. Transformando de vuelta, $WXYZ$ es cíclico.
-
- No hace falta dar los detalles de las transformaciones.
 - No todos los problemas que pueden resolverse así son *tan* fáciles.

Problema 2.

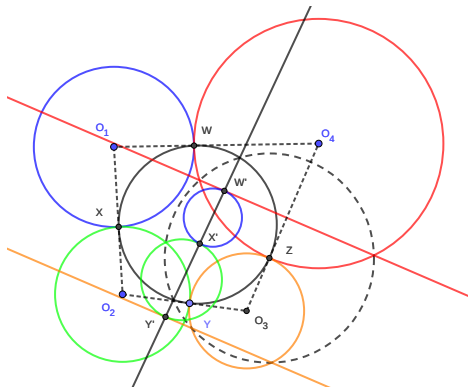
Sea $\overline{BC}$ una cuerda de una circunferencia Ω . Sea ω una circunferencia tangente a la cuerda $\overline{BC}$ en K y tangente interior a Ω en T . Entonces el rayo TK pasa por el punto medio M del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a T . Además, MC^2 es la potencia de M con respecto a ω .



- Inversión respecto a la circunferencia Γ de centro M por B y C .
- La inversión intercambia BC con Ω .
- La circunferencia ω se transforma en ella misma.
- Los puntos K y T son inversos el uno del otro.
- En particular, M , K , T son colineales y $MK \cdot MT = MC^2$.

Problema 3.

Sean ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 cuatro circunferencias tangentes cíclicamente cada una a sus vecinas, de modo que ω_1 toca a ω_2 y ω_4 , ω_2 toca también a ω_3 , y esta última toca a ω_4 . Demuestra que los cuatro puntos de tangencia son cocíclicos.



- Inversión con centro cualquiera de los puntos de tangencia.
- Las circunferencias tangentes en ese punto $\Rightarrow$ rectas paralelas.
- Las otras dos circunferencias $\Rightarrow$ dos circunferencias, cada una de ellas tangente a una de las rectas.
- Los puntos de tangencia X' , Y' , W' son colineales (¿Por qué?).

Demostración.

Utilizamos uno de los puntos de tangencia de las circunferencias ω_1 , ω_2 , ω_3 y ω_4 como centro de la inversión. Los otros tres puntos son obviamente cocíclicos. Sea Ω la circunferencia sobre la que se encuentran. Por la inversión, las imágenes de los tres puntos son colineales. Por tanto, la circunferencia Ω debe pasar por el centro de la inversión – el cuarto punto de tangencia.

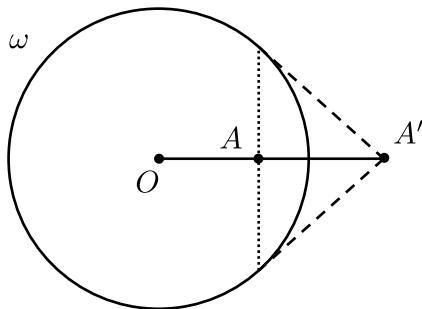
Cuándo **sí** es conveniente invertir...

- Circunferencias y rectas tangentes entre sí.
- ¿Varias circunferencias pasan por O ? Invierte con centro O .
- ¡Configuraciones que se invierten en sí mismas!

Cuándo **no** es conveniente invertir...

- Muchos ángulos dispersos...
- Problemas que involucran rectas, pero no muchas circunferencias.

- H.S.M Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
- E. Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA, 2016.
- **Cut the knot:** <https://www.cut-the-knot.org/>



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

jserrander@educacion.navarra.es