

RALLYEMATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

SOLUCIONES



PRUEBA

2009

NOTA: Tened en cuenta en la realización de los ejercicios:

- La aproximación a números decimales de números irracionales o racionales no enteros conviene hacerlo sólo en el resultado final para no aumentar el error en cada operación intermedia.
- Si piden resultado exacto no se realiza la aproximación decimal.
- En problemas con contexto, por ejemplo medidas, se suele necesitar aproximar el resultado final o bien por defecto o por exceso, no siempre la mejor aproximación es el redondeo.

1. Un cubo y muchas bolas

a) Para obtener el volumen del espacio entre el cubo y la esfera de la figura 1 calculamos:

$$\text{volumen del cubo} = V_c = 12^3 = 1728$$

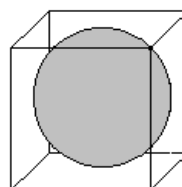


Figure 1

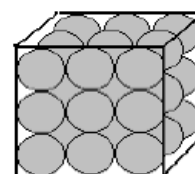


Figure 2

$$\text{volumen de la esfera} = V_e = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288 \cdot \pi$$

Restamos ambos valores:

$$V_c - V_e = 1728 - 288 \cdot \pi \approx 823,2213 \text{ cm}^3$$

b) En la figura 2 hay 27 esferas de radio 2cm por lo que el volumen de las esferas será:

$$V = 27 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 288 \cdot \pi$$

Que coincide con el volumen de la esfera grande de la figura 1 por lo que el volumen del espacio restante será el mismo del apartado anterior:

$$V_c - V = 1728 - 288 \cdot \pi \approx 823,2213 \text{ cm}^3$$

Respuesta:

El volumen de ambos apartados coincide y es exactamente: $1728 - 288 \cdot \pi \text{ cm}^3$.

Una aproximación con $\pi = 3,14$ sería $823,68 \text{ cm}^3$ y con $\pi = 3,1416$ sería $823,2192 \text{ cm}^3$

2. C'est la crise!

Si llamamos x a lo que el industrial debe obtenemos la ecuación:

$$\frac{6}{10}x + 800\,000 = \frac{7}{9}x$$

Resolvemos:

$$x = \frac{90}{16} 800\,000 = 4\,500\,000 \text{ € debe}$$

Actualmente dispone de: $\frac{6}{10}x = \frac{6}{10} \cdot 4\,500\,000 = 2\,700\,000 \text{ €}$

Respuesta

El industrial debe 4.500.000 € y dispone de 2 700 000€

3. Cuando el dinero se convierte en humo

Si llamamos A , B y C a la cantidad de lotes del tipo A , B y C , la condición se traduce en la siguiente ecuación:

$$10A + 8B + 7C = 99 \text{ con } A, B \text{ y } C \text{ numeros naturales } \neq 0$$

Luego, $10A + 8B + 7C = 99 = 3^2 \cdot 11$

Creamos una tabla teniendo en cuenta que:

A	B	$C = \frac{99 - (10A + 8B)}{7}$
1	5	7
2	2	9
2	9	1
3	6	3
4	3	5
6	4	1
7	1	3

4. Enmoquetados...

La altura del atillo según el teorema de Pitágoras es:

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ m}$$

Podemos aplicar Tales:

$$\frac{3}{1} = \frac{4}{x}$$

De donde $x = \frac{4}{3}$

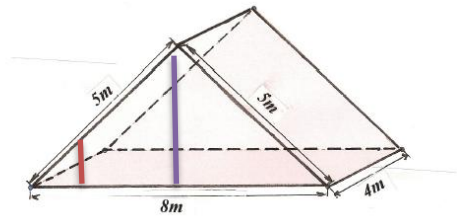
El rectángulo útil tendrá 4 m de ancho y de largo:

$$8 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

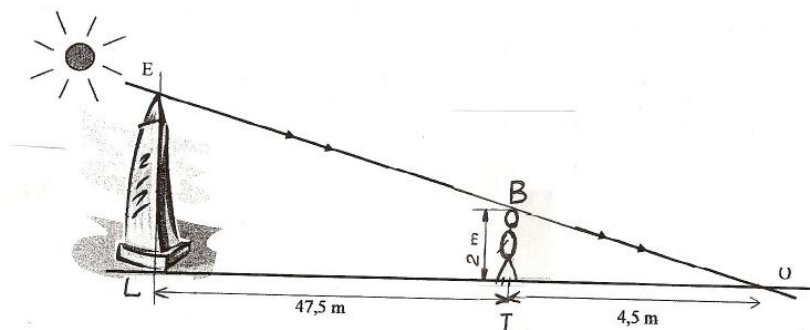
Como la moqueta se vende con anchura de 4 metros deberá pedir la aproximación por exceso de $\frac{16}{3} \approx 5,34 \text{ m}$

Respuesta

Comprará $\frac{16}{3} \approx 5,34 \text{ m}$ de moqueta



5. Como medir la altura de un edificio que no se puede alcanzar



Llamamos H a la altura del obelisco. La base del triángulo rectángulo LO=52 m

Por el teorema de Tales:

$$\frac{H}{2} = \frac{52}{4,5}$$

De donde:

$$H = \frac{104}{4,5} = 23,11 \text{ m}$$

Respuesta

La altura EL del obelisco es 23,11 metros

6. El cuadrante de una lúnula

a) Hallamos el radio IB aplicando Pitágoras :

$$IB = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot R^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

El área del semicírculo de diámetro CB es:

$$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R \right)^2 = \frac{\pi \cdot R^2}{4}$$

Al sector circular le restamos el área del triángulo para obtener el área del segmento circular:

$$\frac{1}{4} \pi \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2$$

Finalmente, para obtener el área rayada restamos a la del semicírculo de diámetro CB la del segmento circular :

$$\frac{\pi \cdot R^2}{4} - \left(\frac{1}{4} \pi \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2 \right) = \frac{R^2}{2}$$

Respuesta

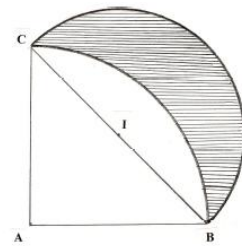
El área de la lúnula rayada es:

$$\frac{R^2}{2}$$

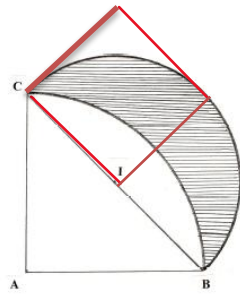
b) El cuadrado de la misma área tendrá por lado:

$$\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

que coincide con el radio del semicírculo IB=CI



El cuadrado de lados rojos tiene por área $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 = \frac{R^2}{2}$ luego la misma área que la lúnula rayada. Un ejemplo de cuadrado de la misma área es el dibujado en rojo.

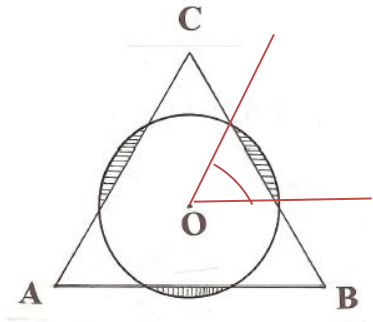


Escriba aquí la ecuación.

Especial Tercero de ESO

7. Cuestión de áreas

- a) El ángulo mide 60° al ser un hexágono regular con 6 ángulos centrales iguales por lo que cada uno de ellos medirá $360^\circ/6=60^\circ$



- b) El área de la parte rayada es el triple del área de uno de los segmentos circulares (los tres son iguales)

El área del segmento circular se puede obtener restando el del sector circular menos la del triángulo equilátero (el hexágono regular se divide en 6 triángulos equiláteros de lado un tercio del lado del triángulo inicial, luego de 2 cm. Llamamos A_{sc} , A_{sg} y A_T a las áreas del sector circular, del segmento circular y del triángulo equilátero de lado 2cm respectivamente.

$$A_{sc} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{2\pi}{3}$$

Para hallar el área del triángulo necesitamos calcular primero su altura:

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Luego

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Finalmente, el área rayada total será:

$$\text{Área rayada} = 3 \cdot A_{sg} = 3 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = 2\pi - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 1,087 \text{ cm}^2$$

Otra forma:

Calculamos el área del triángulo ABC:

$$S = \frac{6 \cdot \sqrt{6^2 - 3^2}}{2} = 9\sqrt{3}$$

Este triángulo se divide en 9 triángulos equiláteros iguales de lado 2 cm por lo que cada uno tendrá por área:

$$S_t = \sqrt{3}$$

Por otro lado, el área del sector circular de radio 2cm es:

$$\frac{\pi 2^2}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Luego el segmento circular tiene como área:

$$\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Como hay rayados tres segmentos, se tiene:

$$S = 3 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = 2\pi - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Respuesta

El área de la parte rayada es $2\pi - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 1,087 \text{ cm}^2$

8 – Una cuestión más de edad

Si llamamos x a la edad de mi hija cuando yo tenga 72 años:

$$72 = 2x$$

Obtenemos que mi hija tendrá 36 años y mi hijo 46 ya que se lleva 10 años con mi hija y es el mayor.

Llamamos y a los años que han pasado desde la actualidad hasta que tenga 72 años

$$72 - y = 2(46 - y)$$

De donde se obtiene:

$$y = 20$$

La edad actual de mi hija será $36 - 20 = 16$

Respuesta

La edad actual de mi hija es 16 años

Especial Cuarto de ESO

7. ¡Esto no gira en redondo!

Calculamos el área del círculo:

$$S_c = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

El área de cada uno de los seis triángulos equiláteros en que se divide un hexágono regular se obtiene:

$$S_T = \frac{10h}{2} = 5h$$

Por otro lado la altura de cada triángulo es $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$

Luego $S_T = 5h = 25\sqrt{3}$

El área del hexágono será: $S_h = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$

El área de cada uno de los seis segmentos circulares sería

$$\frac{S_c - S_h}{6} = \frac{100\pi - 150\sqrt{3}}{6} = \frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{3}$$

En nuestro caso nos piden el área del círculo menos la de tres de los segmentos circulares:

$$S = 100\pi - (50\pi - 75\sqrt{3} \text{ cm}^2) = 50\pi + 75\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 286,983 \text{ cm}^2$$

Respuesta

El área no rayada mide exactamente: $50\pi + 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$

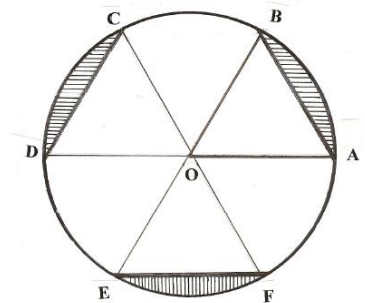
Otra forma

Calculamos el área de uno de los segmentos circulares restando al área del sector circular el área del triángulo equilátero:

$$S_s - S_T = \frac{\pi \cdot 10^2}{6} - 25\sqrt{3} = \frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}$$

El área que nos piden es la del círculo menos la de tres segmentos circulares:

$$S = 100\pi - 3 \cdot \left(\frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3} \right) = 50\pi + 75\sqrt{3}$$



8. Cálculo sin fin

a) $T(23)=23-2=21$ $T(24)=22$ $T(25)=23$ $T(26)=24$ $T(27)=25$ $T(28)=26$
 $T(29)=27$ $T(30)=30-3=27$ $T(31)=28$ $T(32)=29$ $T(33)=30$ $T(34)=31$

- b) Se aplica la operación T 2009 veces empezando por 2009 luego el último número al que se aplica corresponderá a $2009+2008=4017$

Aplicando la operación a 4017 se tiene $T(4017)=4017-401=3616$

Respuesta

El último resultado será 3616