

Miguel Barreras Alconchel

barrerasalconchelm@gmail.com

Algunas veces, en Matemáticas, y en otras disciplinas, nos encontramos con situaciones, con problemas, en los que la intuición no coincide con el resultado de un razonamiento riguroso. Es claro que la intuición es muy importante en investigación, en resolución de problemas, pero, a veces, intuición y razón no armonizan, incluso, están en las antípodas y ese contraste nos produce un chasquido en la mente, un chasquido agradable, que nos confirma que la ciencia no tiene solo una cara, que la ciencia es poliédrica.

Te voy a contar algunas situaciones en las que ocurre esto.

(Las soluciones, al final)

### 1. Extraña repartición

Dos individuos, Abdul [A] y Beremín [B] se dirigen por el desierto a Bagdag montados en sendos camellos. Se encuentran, caído [C] y maltrecho en las arenas del desierto ardientes, a un hombre al que han robado comida, dinero y camello. Solidariamente A y B lo curan y lo invitan a que se una a ellos hacia Bagdag.

Han de compartir la comida. A lleva 5 panes, B, 3. Estos 8 panes, repartidos entre los tres viajeros, deberán durar para llegar a Bagdag.

Una vez en Bagdag, C les declara que es califa. En forma de agradecimiento va a su casa y vuelve con 8 monedas de oro. "Toma, Abdul, 5 monedas, puesto que tú pusiste 5 panes, y para ti, Beremín, 3. Que Alá os proteja".

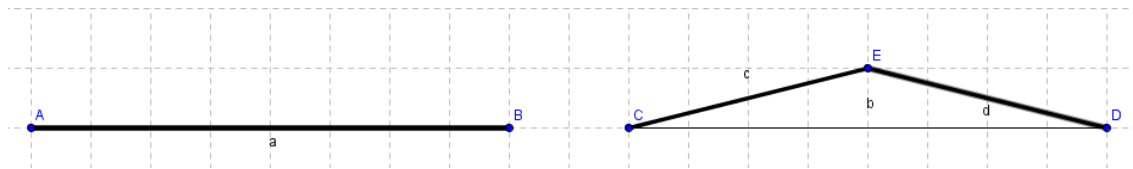
Pero Abdul no está de acuerdo con esta repartición.

*¿Cuál te parece a ti la repartición justa?*

### 2. La viga dilatada

Imaginemos una vía de un tren continua (en realidad no lo son) abandonada. Mide 1 km (1.000 m) y es un segmento recto. Los extremos de la vía tienen dos topes muy potentes; esto es, la vía está "anclada".

Un día de mucho calor (muchísimo calor) la vía se dilata. Se dilata 1 m. Como la vía está anclada se rompe y, como es homogénea, se parte por la mitad:



[Es claro que el dibujo no está hecho a escala]

*Sin echar las cuentas (el problema es muy fácil), apelando a tu intuición, escribe cuál te parece que mide la altura en el centro,  $b$ .*

*Luego, haz las cuentas y sorpréndete.*

### 2bis. Doblando una hoja de papel

*¿Qué grosor tiene una hoja de papel de 0,14 mm de grosor si la doblamos 50 veces?*

### P1. El examen sorpresa

Este año hay clase de Matemáticas todos los días de la semana. La profesora de Matemáticas, que nunca miente, el viernes anuncia lo siguiente: "Un día de la semana siguiente habrá examen de sucesiones. Y será por sorpresa".

Esta afirmación deja un poco desconcertados a los alumnos.

En el recreo, Zenón, un alumno muy despierto, razona así con algunos compañeros:

"El viernes no puede ser, porque en ese caso, el jueves por la tarde ya sabríamos seguro que sería el viernes y no sería por sorpresa. Así que nos quedamos con jueves, miércoles, martes o lunes. Pero, por la misma razón, hay descartar el jueves, y, así, con todos los demás. No puede ser".

Llega la semana siguiente. El martes la profesora dice: "Sacad una hoja". Y les pone un examen y es por sorpresa.

### 3. El cazador, su caseta y el oso

Un cazador tiene una caseta [solo una caseta]. Un día sale de casa. Camina 10 km al Sur. Se para. Camina 10 km al Este. Se para. Camina 10 km al Norte y se encuentra en su caseta, donde encuentra a un oso.

*¿De qué color es el oso?*

Este problema es un clásico. Aparece en muchos libros de divulgación matemático, pero, en casi todos, mal resuelto.

#### 4. Y... siguiendo con los viajes

A las 12 de la mañana el monje Bolzano parte de su cueva para subir la montaña que le lleva a una ermita. Pasa todo el día meditando. Al día siguiente, sale, a las 12 horas, de la ermita y baja, por el mismo camino de subida, a su cueva.

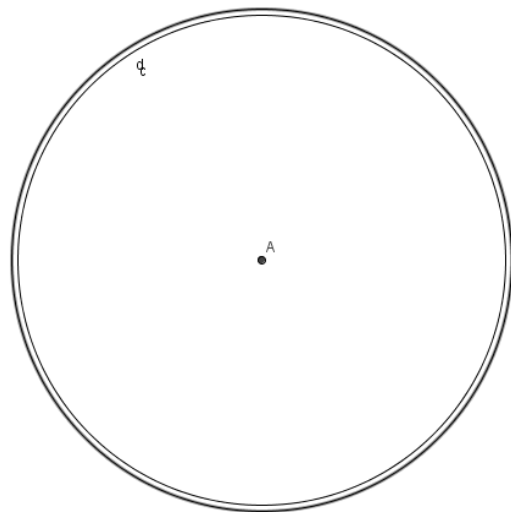


Mientras baja razona: “Qué curioso. Estoy seguro de que en la bajada pasaré por un punto a la misma hora en la que ayer estaba subiendo”.

¿Lleva razón el monje?

#### 5. Jugando con el ecuador

Supongamos unas manos gigantescas que quieren jugar con el planeta Tierra. Toma una cuerda de longitud lo que mide el ecuador de la Tierra (40.000.000 m, aproximadamente) y envuelve el ecuador con esa cuerda, que quedará absolutamente pegada a cada punto del ecuador. De tal forma que, si un bañista está tomando el sol en una playa del ecuador y su cuello se encuentra, desgraciadamente, en la línea del ecuador se va a quedar sin respiración en poco tiempo. Las manos enormes se compadecen del hombre en bañador y añaden a los 40.000.000 m, un metro (1 m). Colocan de nuevo la cuerda "aumentada" sobre el ecuador. Ahora la cuerda no toca la tierra. Hay cierta "holgura".



*¿Crees que la holgura de la cuerda nueva es suficiente para dejar de estrangular al bañista? ¿Crees que es suficiente para que pueda librarse de ella? ¿Cuál es, aproximadamente, la holgura? ¿Cuál es, exactamente, la holgura?*

Ahora tenemos una pelota de baloncesto (también esférica). Operamos de la misma manera.

*¿Cuál es, ahora, aproximadamente, la holgura? ¿Cuál es, exactamente, la holgura?*

## 6. Siguiendo con el ecuador...

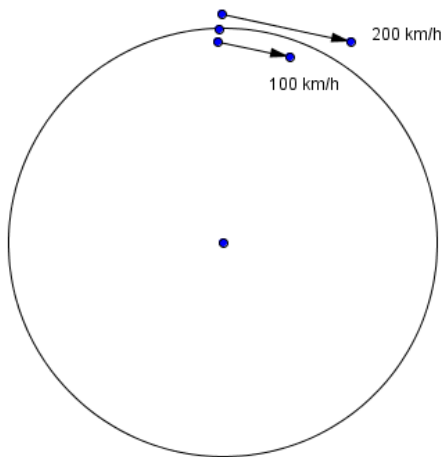
Ahora mismo hay dos puntos diametralmente opuestos en el ecuador con la misma temperatura. De hecho...

En cualquier momento, hay dos puntos antípodas en el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.

*¿Sabrías demostrarlo?*



## 7. A vueltas con Harry Potter



Con su superescoba, Harry Potter da una vuelta circular al patio a una velocidad de 200 km/h. Y una segunda vuelta a una velocidad de 100 km/h.

*¿Cuál ha sido la velocidad media global de las dos vueltas?*

## 8. Números primos

Se sabe que existen infinitos números primos. Es decir que, dado cualquier número primo, siempre hay otro primo mayor que él. [¿Conoces la demostración? Es sencilla, bella y elegante]

Ahora bien. Pon atención. Yo aseguro que dada una longitud tan grande como se quiera, podemos encontrar en la sucesión de los números naturales un trozo de recta tan larga como se quiera en la que no haya ningún número primo. Y no solo eso: Puedo encontrar infinitos intervalos de esa longitud, en los que no haya ningún número primo.

*¿Te lo crees?*

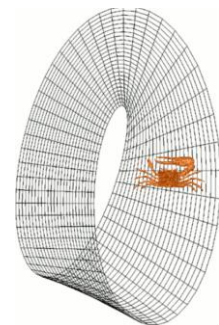
Y es que, cuando se juega con el infinito, suelen pasar ... “cosas raras”.

Por cierto, ¿sabías que el famoso símbolo del infinito  $\infty$  lo inventó un matemático inglés, John Wallis, en 1655?

Es una especie de 8 tumbado, que sugiere una broma entre matemáticos:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x - 8} = \infty \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x - 7} = \infty$$

Recuerda a una famosa curva, la **lemniscata de Bernoulli**, una palabra que en griego, *λεμνισχάτα*, significa cinta, una cinta con la que se adornaba la cabeza de los convidados a un banquete. Una cinta, por cierto, que recuerda a otra más famosa, la cinta de Möebius.



¿Cuántas caras tiene una cinta de Möebius?

¿Qué ocurre cuando la cortamos por la mitad?

## 9. El hotel infinito de Hilbert

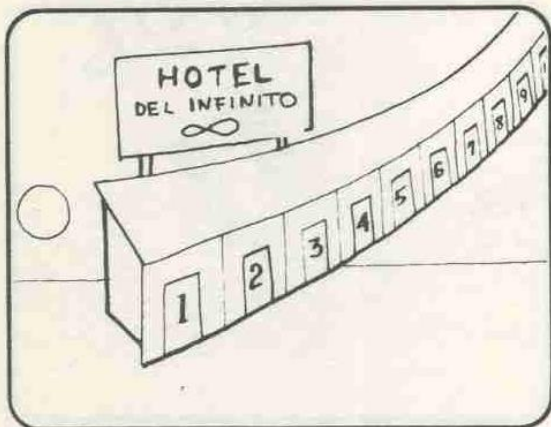
Una manera de saber si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos sin contarlos es intentar emparejarlos (uno-a-uno, correspondencia biunívoca). Así, si en un baile se ponen a bailar hombres con mujeres uno-a-una y no sobra ni falta ninguna persona podemos asegurar que hay el mismo número de mujeres que de hombres. Llevando esta idea a categorías infinitas, como el conjunto de números naturales, se puede llegar a conclusiones que parecen ir en contra del sentido común. Ya Galileo puso de manifiesto esta situación emparejando cada número natural con su cuadrado. Así:

1	↔	$1^2=1$
2	↔	$2^2=4$
3	↔	$3^2=9$
4	↔	$4^2=16$
5	↔	$5^2=25$
6	↔	$6^2=36$
...	↔	...
n	↔	$n^2$

Este emparejamiento nos sugiere que hay la misma cantidad de cuadrados que de números naturales, contradiciendo el lema de que “el todo es mayor que una parte”.

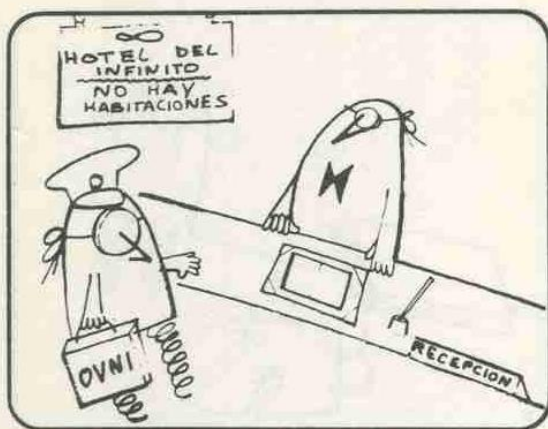
Podemos trasladar la idea a un hotel con infinitas habitaciones:

# Hotel del Infinito

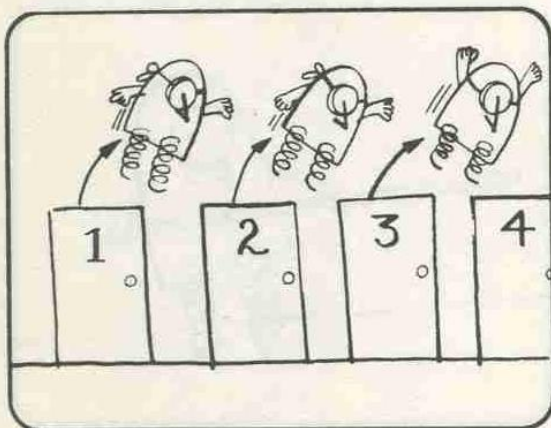


Antes de irse, el doctor Zeta relató un cuento fantástico.

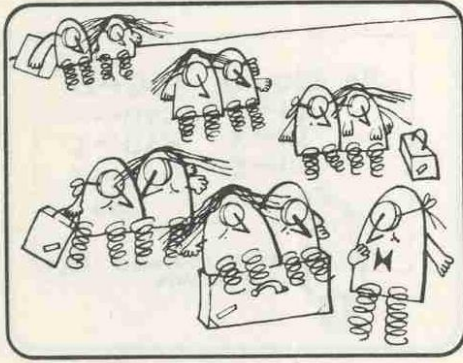
**Doctor Zeta:** En el centro de nuestra galaxia hay un hotel enorme, llamado Hotel del Infinito. Tiene un número infinito de habitaciones, que se extienden hasta un espacio de dimensión superior a través de un agujero negro. Las habitaciones están numeradas de 1 en adelante.



**Doctor Zeta:** Un día, estando ocupadas todas las habitaciones, llegó el piloto de un OVNI, que iba de camino hacia otra galaxia.



**Doctor Zeta:** A pesar de no disponer de habitaciones, el gerente consiguió dar alojamiento al piloto. Sencillamente, trasladó al ocupante de cada habitación a la de número siguiente. Así, la habitación número 1 quedó libre para el piloto.

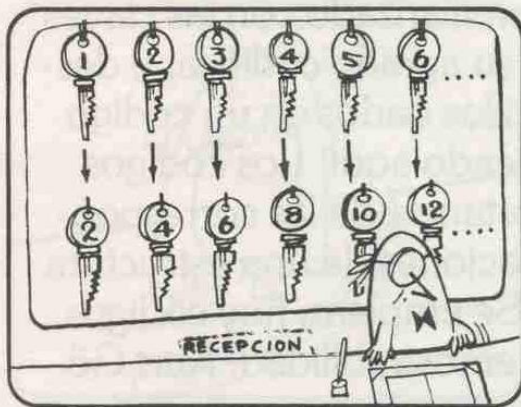


**Doctor Zeta:** Al día siguiente se presentaron cinco parejas en luna de miel. ¿Podría el Hotel del Infinito recibirlos? Sí. El gerente no tuvo más que trasladar a cada residente a la habitación número cinco unidades mayor. De esta forma, las parejas pudieron ocupar las números 1 a 5.

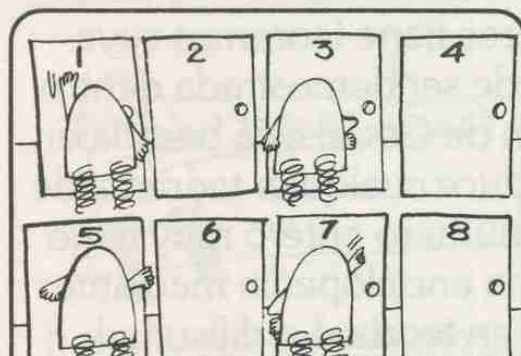


**Doctor Zeta:** Ese fin de semana llegó un número *infinito* de comisionistas de chicle, para celebrar una convención.

**Herman:** Comprendo ya que el Hotel del Infinito pueda atender a cualquier número *finito* de recién llegados. Pero ¿cómo dar habitación a un número *infinito* de ellos?



**Doctor Zeta:** Sin dificultad, amigo Herman. El gerente hará mudarse a cada inquilino, llevándolo a una habitación de número doble del que tenía.

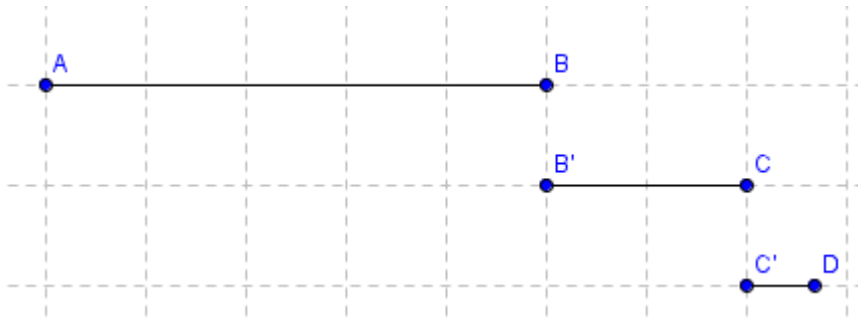


**Herman:** ¡Pues claro! Así todos quedan alojados en habitaciones con números pares. ¡Y las impares, que son infinitas, quedan libres para alojar a los del chicle!

## 10. La paradoja de Aquiles y la tortuga

Los griegos aceptaban que hay infinitos números primos (de hecho, Euclides lo demostró en el s. III a.C.). Pero idea de jugar con el hotel de Hilbert, como si el infinito fuera un número no les gustaba. No hicieron mucho caso a las inteligentes e inquietantes aporías de Zenón de Elea (s. V a. C.), como la que sigue:

La Tortuga reta a Aquiles, el guerrero más veloz de Grecia: "Te echo una carrera. Dame un kilómetro de ventaja. Nunca me alcanzarás y yo ganaré la carrera". "Claro que te alcanzaré". "No. Escucha"



Al principio, tú estás en A y yo en B. Cuando llegues a B, yo ya no estaré en B. Cuando tú corras de B' a C y llegues a C, yo ya no estaré en C, etc.

Sin embargo, Aquiles atrapa a la tortuga, pero no se cocina una sopa de tortuga: prefiere pensar en el razonamiento de la tortuga.

<b>velocidad Aquiles</b> va= 10 km/h	<b>velocidad Tortuga</b> vt= 1 km/h	x espacio recorrido por la T hasta la captura	1	10	1
		t tiempo transcurrido hasta la captura			
		T	$1 = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{1}$		
distancia de ventaja d= 1 km		A	$10 = \frac{x+1}{t} \Rightarrow t = \frac{x+1}{10}$		
			$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{x+1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ km}$		
			$\Rightarrow t = \frac{1}{9} \text{ h} = 6' 40''$		

Que resulta ser la suma infinita (sucesión geométrica) en general...

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

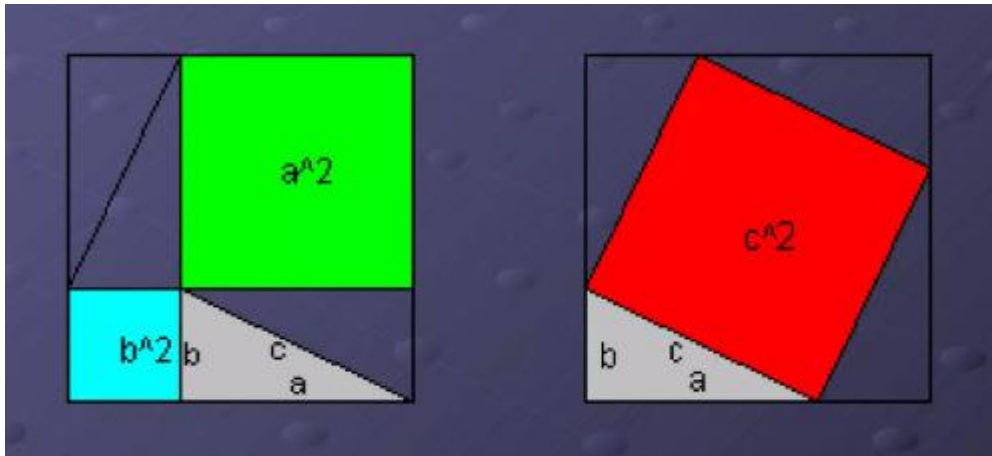
$$t = \frac{d}{va - vt}$$

**t= 0,1111 horas**  
**6,67 minutos**

## 11. El Teorema de Pitágoras

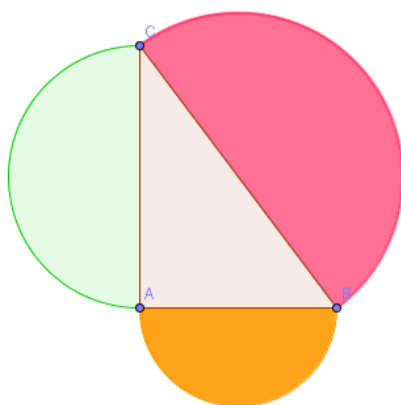
Seguro que los pitagóricos estaban muy satisfechos de haber demostrado el Teorema de Pitágoras, un resultado que, antes que ellos, los egipcios ya utilizaban (para reconstruir las parcelas después de las inundaciones del Nilo, por ejemplo), pero sin pensar en una demostración.

Hay muchas demostraciones. Una que a mí me gusta es esta, que no necesita palabras:

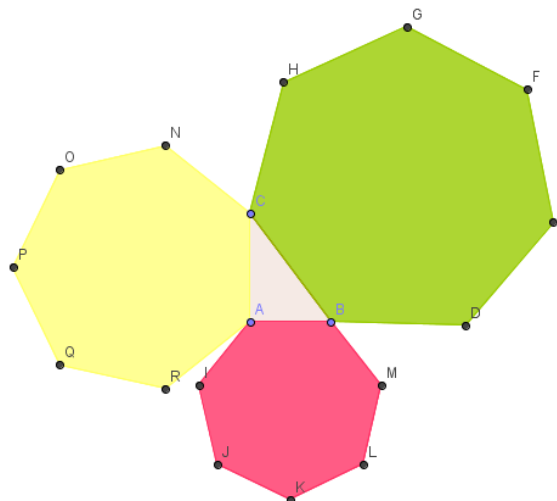


Por cierto, el teorema de Pitágoras puede generalizarse:

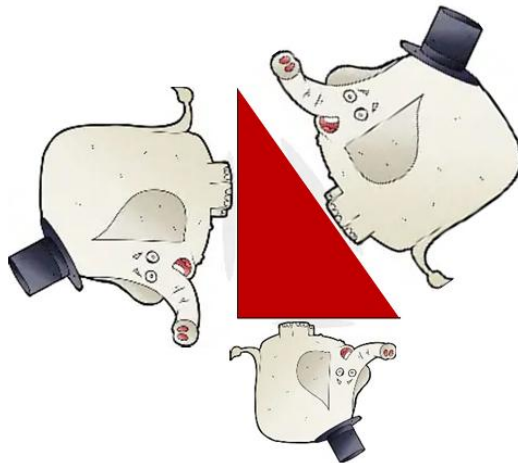
A semicírculos



A polígonos regulares:



Incluso a elefantes con sombrero (proporcionales):



## 12. La diagonal de un cuadrado

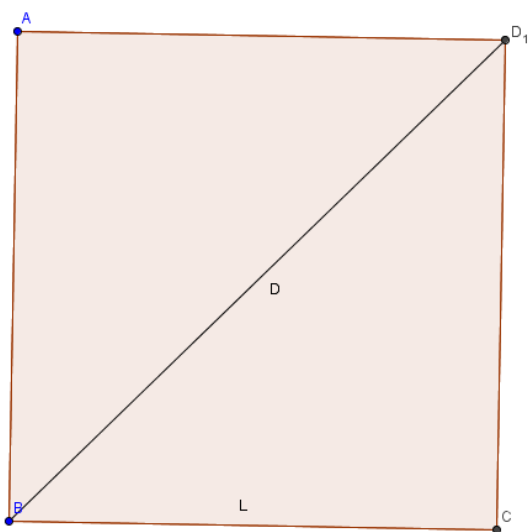
Pero las cosas se complicaron cuando aplicaron su Teorema de Pitágoras a una de las figuras más sencillas: el cuadrado de lado 1.

Se puede decir que medir es comparar con un patrón. Pero comparar exactamente. Es decidir cuántas veces (número entero) cabe el patrón en lo que se va medir.

*La diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede medirse. ¿Sabrías razonarlo?*

Por el Teorema de Pitágoras la diagonal vale  $\sqrt{2}$ . Pero este número no es racional, no puede escribirse como una fracción. (Supongo que conoces la demostración, muy bella, por cierto)

Pues bien, supongamos que la diagonal del cuadrado (D) pudiera medirse. Querría decir que habría una partición de L tal que un trocito de esta partición cabría un número exacto de veces en D. Un ejemplo.



Supongamos que dividimos L en 1.000 partes iguales y que cada trocito cabe exactamente 1.414 veces. Esto es, la diagonal mediría exactamente 1.414/1.000; es decir, D sería ... ¡UNA FRACCIÓN! Pero sabemos que  $D (= \sqrt{2})$  no es una fracción

Por lo tanto *La diagonal de un cuadrado no puede medirse*.

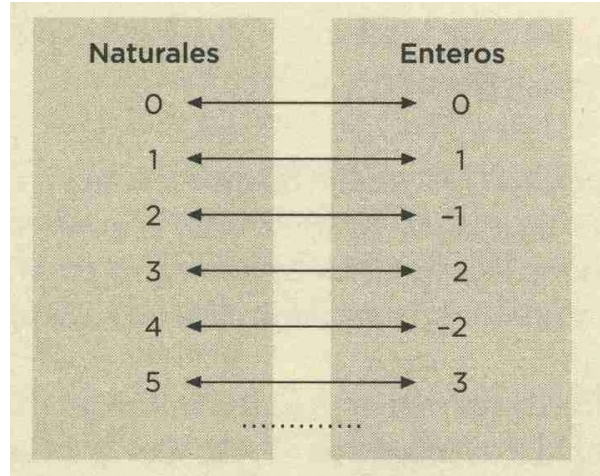
[Un consejo: no digas esto en ambientes no matemáticos. Te tomarán por

una persona chiflada]

### 13. A vueltas con el infinito

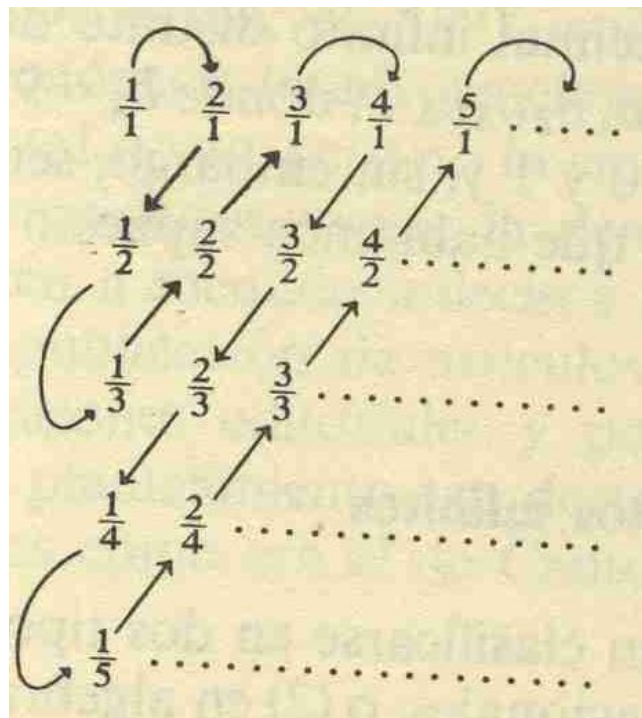
Ya vimos las cosas raras que pasan en el hotel de infinitas habitaciones de Hilbert y que podemos emparejar los números naturales con los cuadrados. De la misma manera, podemos coordinar los números naturales con los enteros:

Así que el cardinal de  $\mathbf{N}$  coincide con el de  $\mathbf{Z}$  (¡?).



Parece que cuando saltamos al conjunto de números racionales, las fracciones,  $\mathbf{Q}$ , ya no podremos conseguir un emparejamiento uno-a-uno. De hecho  $\mathbf{Q}$  es un conjunto denso, es decir, entre dos números racionales cualquiera,  $q$ ,  $r$ , siempre podemos encontrar otro, por ejemplo,  $(q+r)/2$ . Y no solo uno, sino infinitos. Demasiados para emparejarlos con el de los naturales,  $\mathbf{N}$ .

Pues no, no es así. Cantor demostró que  $\mathbf{Q}$  también es numerable. Es decir también se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales, y por lo tanto tiene el mismo cardinal. Para demostrar esto podemos recurrir simplemente a seguir las flechas de la figura, "contando" así las fracciones de paso (si se quiere, podemos quedarnos solo con las fracciones irreducibles):



Así que el cardinal de  $\mathbf{N}$  coincide con el de  $\mathbf{Q}$  (¡?). Ambos conjuntos son numerables.

Que el conjunto  $\mathbf{Q}$  sea numerable sigue pareciéndonos increíble si consideramos, por ejemplo, este conjunto:

$$A = (3,4] \cap \mathbf{Q}$$

Tenemos claro que 4 es el número más grande de  $A$ , pero, ¿cuál es el más pequeño?

Llegados a este punto, podríamos pensar que, ya puestos, el conjunto de todos los números reales,  $\mathbf{R}$ , representados en la recta real, también es numerable, ¿no? Pues no.

Lo demostró Cantor de una manera muy elegante, por *reducción al absurdo*, con un argumento que se denomina “diagonal”.

Supongamos, por ejemplo, que los elementos del conjunto  $(0,1)$  son numerables, es decir que existe una correspondencia uno-a-uno con los números naturales.

Algo así, por ejemplo:

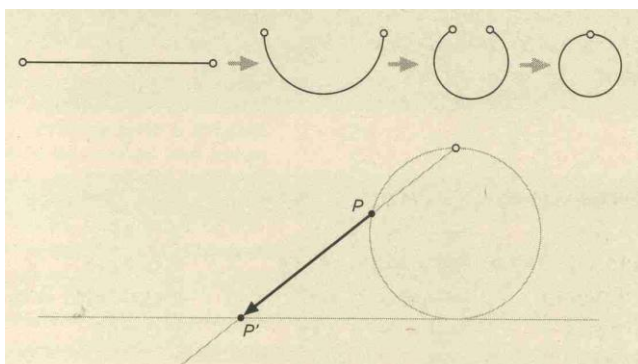
<b>N</b>	<b>(0,1)</b>
1	0, <b>0</b> 36765540...
2	0,7 <b>5</b> 6601198...
3	0,45 <b>7</b> 877803...
4	0,30 <b>1</b> 067124...
5	0,2402 <b>3</b> 5620...
6	0,44444 <b>4</b> 444...
...	

Fijándonos en los dígitos que aparecen en la diagonal, construimos el siguiente nuevo número:  $\mathfrak{g}=0,100100\dots$

Si el dígito de la diagonal es **0**, lo cambiamos por **1**, si no es **0**, lo cambiamos por **0**. Es claro que  $\mathfrak{g}=0,100100\dots$  no está en la lista de la columna de la derecha. Por tanto  $\mathbf{R}$  no es numerable.

Pero las cosas “raras” no acaban aquí.

Los elementos de cualquier segmento, por pequeño que sea, pueden coordinarse con todos los elementos de la recta real: (sin palabras)



Y, más aún: Los elementos del segmento **(0,1)** pueden ponerse en correspondencia uno-a-uno con los del cubo de arista 1. (Adivina quién lo demostró. Cantor, claro, que quedó bastante perplejo con su propia conclusión).

Asociamos a cualquier elemento del cubo  $M(X,Y,Z)$

$X=0,x_1x_2x_3\dots$        $Y=0,y_1y_2y_3\dots$        $Z=0,z_1z_2z_3\dots$

Con su pareja en  $(0,1)$ :  $P_m=0,x_1x_2x_3y_1y_2y_3z_1z_2z_3\dots$

Y, al revés, cualquiera de  $(0,1)$ :  $P=0,a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3\dots$  con su pareja en el cubo:  $M_p(X_p,Y_p,Z_p)$ , siendo:

$X_p=0,a_1b_1c_1\dots$        $Y_p=0,a_2b_2c_2\dots$        $Z_p=0,a_3b_3c_3\dots$

Así, la cardinalidad de cualquier segmento (por pequeño que sea) es la misma que la de cualquier cubo (por grande que sea (i?)).

#### 14. Volvamos a lo finito. Una simple apuesta (Cumpleaños feliz)

Tomamos al azar tres personas.

¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos celebren su cumpleaños el mismo mes?

Tomamos al azar cuarenta personas.

¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos celebren su cumpleaños el mismo año?

¿A partir de cuántas personas es la probabilidad de coincidencia mayor que el 50%?

#### 15. Paradoja de Yule-Simpson

En algunas (raras) ocasiones, partiendo de resultados parciales, agrupándolos de alguna manera, se llega a resultados globales contrarios a la intuición. Observa la tabla y saca tus propias conclusiones.

	cirujano A			cirujano B		
	éxito	total	% éxito	éxito	total	% éxito
Cirugía TOTAL	96	100	96,00%	76	80	95,00%
C. URGENTE	37	40	92,50%	66	70	94,29%
C. PROGRAMADA	59	60	98,33%	10	10	100,00%

## 16. El tran-tran

En la mesa del feriante hay cuatro dados **ROJO** 4 4 4 4 4 4 de colores distintos. También es distinta la **AZUL** 8 8 2 2 2 2 puntuación de cada una de sus seis caras.

El juego que propone el feriante es el siguiente: “Elije un dado. El que tú quieras. Yo elegiré otro. Ponemos un euro cada uno encima de la mesa. Tú tiras tu dado. Yo, el mío. Gana los dos euros el que saque mayor puntuación en su dado”

¿Te parece un juego justo? Ponte en la piel del jugador. ¿Qué dado elegirías? Ahora eres el feriante. Piensa el color que elegirías en función del que elige el que juega. Analiza el juego. Haz un diagrama de árbol. Si te fijas, te darás cuenta de que para cualquier opción del jugador, el feriante siempre encuentra una mejor. (¡?)

## Ustedes están... en un globo

*Dos hombres hacen una excursión en un globo. De repente, se levanta un viento huracanado. El globo se va a la deriva. Amaina la tempestad. Los tripulantes del globo han salvado el pellejo por los pelos. No tienen ni idea de a dónde han ido a parar. Se disponen a aterrizar en un prado. Abajo ven un paisano que les observa. El globo está a unos diez metros del suelo. Oiga, buen hombre, le pregunta uno de los tripulantes. ¿Nos podría decir dónde estamos? El hombre se queda pensando, callado, un minuto, dos. Ustedes están en un globo, contesta por fin. El otro tripulante le hace una pregunta, casi afirmando. Oiga, usted es matemático, ¿verdad? El paisano*



*se queda sorprendido. Sí, ¿por qué lo dice? Por tres razones, le explica el del globo. Una, porque lo que nos ha dicho es cierto. Dos, porque le ha costado mucho tiempo responder. Y tres, porque su contestación no nos sirve absolutamente para nada.*

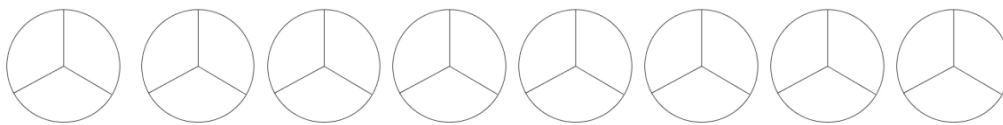
## SOLUCIONES

### 1. Extraña repartición

La mayoría de la gente ve justa la repartición 5 a 3. Desde un punto de vista ético, hay quien cree que Abdul y Beremín deberían recibir lo mismo (4 monedas cada uno) pues ambos pusieron todo lo que tenían.

Supongamos que Abdul no está de acuerdo y lleva el asunto a juicio donde razona de la siguiente manera:

Imaginemos que los 8 panes los dividimos en tres porciones iguales, obteniendo así 24 porciones:



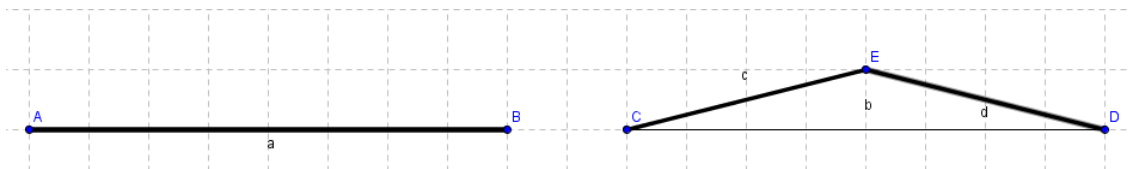
Imaginemos, para simplificar el problema que les cuesta 8 jornadas llegar a Bagdag y cada uno come una ración cada día. Así:

	A	B	C
come	8 raciones	8 raciones	8 raciones
aporta	15 r (= 5 panes)	9 r (=3 panes)	---
REGALA	7 raciones	1 ración	---
OBTIENE	7 monedas	1 moneda	

Si esta discusión se llevara a juicio, parece claro que el juez debería saber matemáticas (o tener algún asesor que supiera). Y en ese caso, esta le parecería una conclusión clara y contundente.

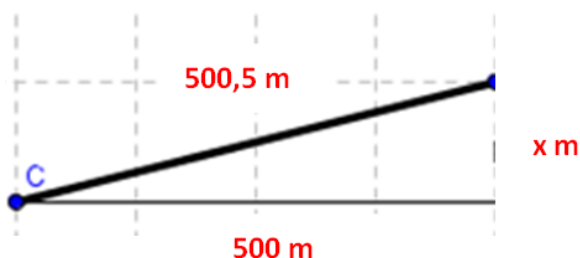
### 2. La viga dilatada.

L=1.000 m      aumenta 1 m



[Es claro que el dibujo no está hecho a escala]

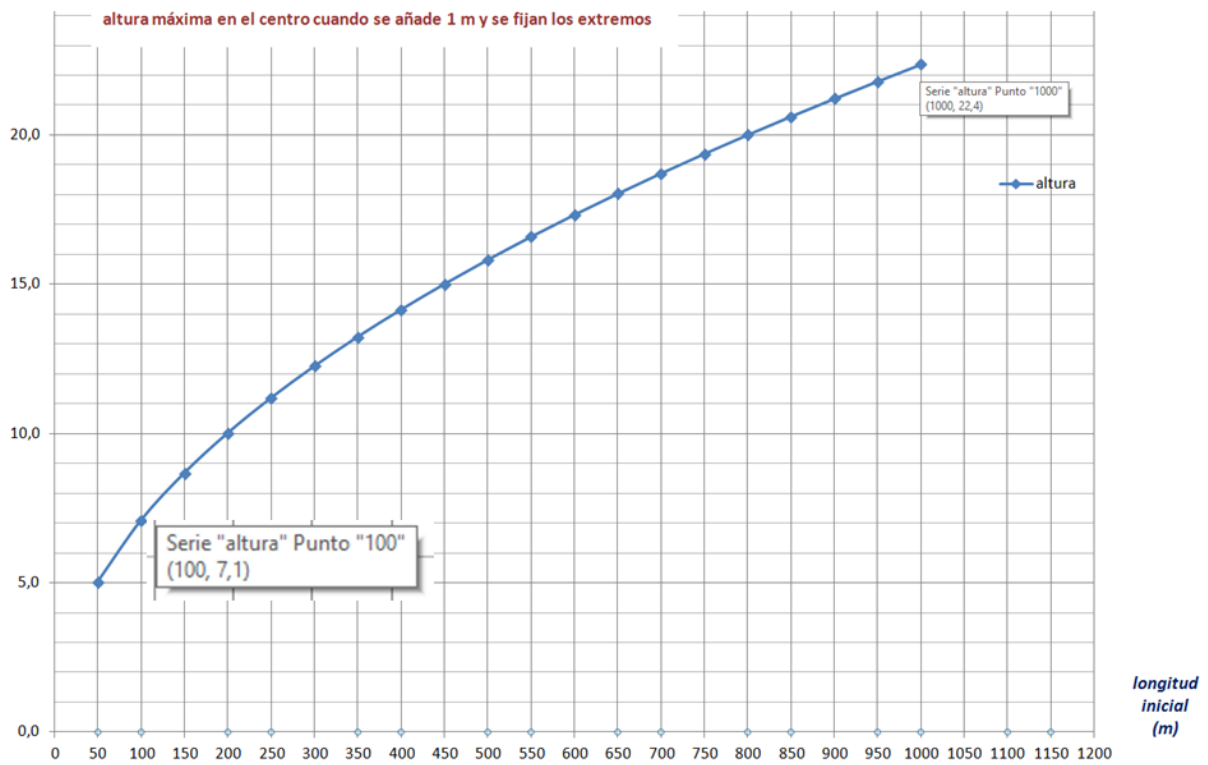
Tenemos el siguiente triángulo rectángulo, al que aplicamos el teorema de Pitágoras:



$$x = \sqrt{500,5^2 - 500^2} = 22,37 \text{ m}$$

[la altura de un bloque de casas de 7 pisos] (Glub!)

En general:

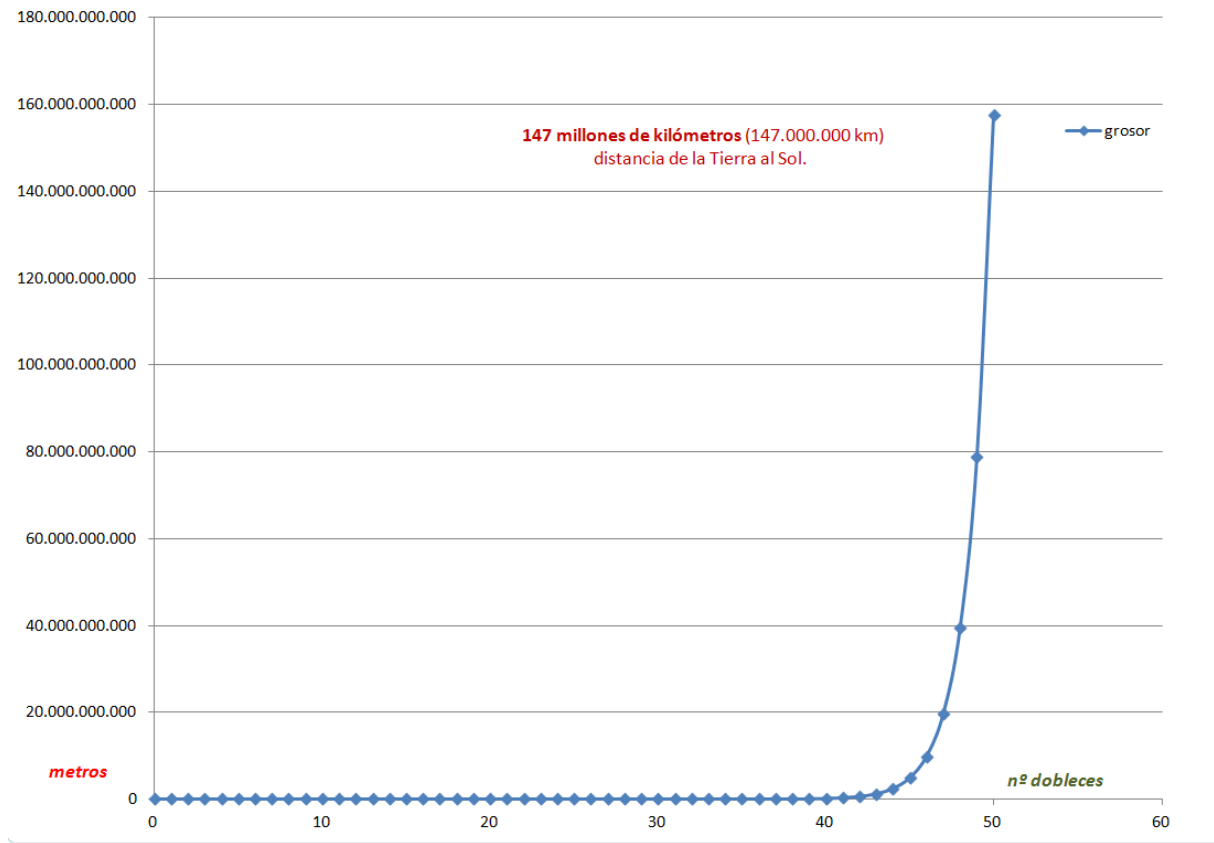


## 2bis. Doblando una hoja de papel

¿Qué grosor tiene una hoja de papel de 0,14 mm de grosor si la doblamos 50 veces?

$$g = 0,14 \times 2^{50} \text{ mm} = 1,58 \times 10^{14} \text{ mm} = 157.625.987 \text{ km}$$

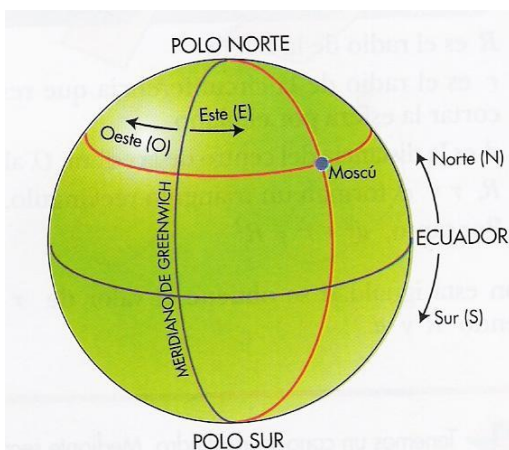
Un poco más que la distancia de la Tierra al Sol.



### 3. El cazador, su caseta y el oso

Un cazador tiene una caseta [solo una caseta]. Un día sale de casa. Camina 10 km al Sur. Se para. Camina 10 km al Este. Se para. Camina 10 km al Norte y se encuentra en su cabaña, donde encuentra a un oso.

*¿De qué color es el oso?*

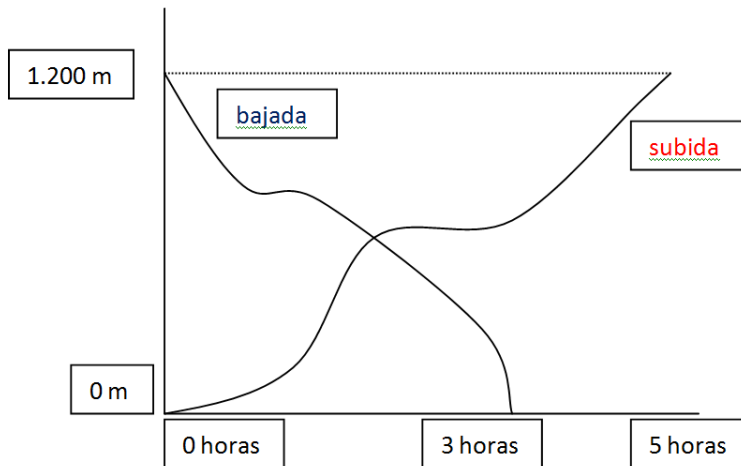


Este problema es un clásico. Aparece en muchos libros de divulgación matemática, pero, en casi todos, mal resuelto. Piensa en el polo norte, pero piensa también en el hemisferio Sur, donde, por cierto, no hay osos.

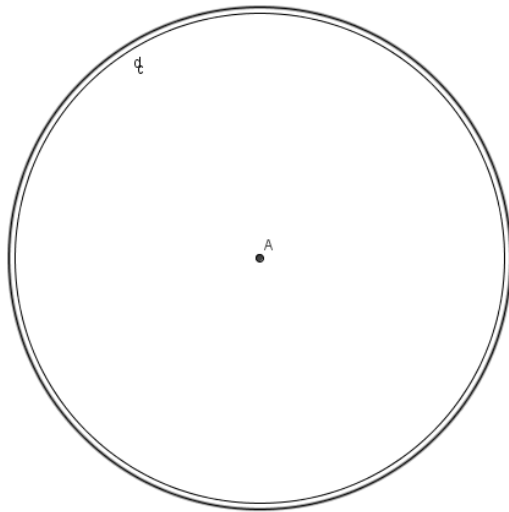
#### 4. Y... siguiendo con los viajes



Sin palabras:



#### 4. Jugando con el ecuador



Llamemos  $L$  a la longitud del ecuador (unos 40.000.000 m) y  $R$  al radio de la Tierra (unos 6.370.000 m).

$R'$  al radio desconocido correspondiente a la longitud aumentada en 1 m.

Así:

$$L = 2\pi R \quad \text{Por tanto (restando)}$$

$$L + 1 = 2\pi R'$$

$$1 = 2\pi(R' - R) = 2\pi h$$

Esto es  $h = \frac{1}{2\pi} \text{ metros} \cong 0,16m = 16 \text{ cm}$ . Sorprendente!

Pero, más curioso todavía. Si llamamos ahora  $L$  al "ecuador" del balón de baloncesto y  $R$  a su radio... ¡vale exactamente el razonamiento anterior! y, por tanto la holgura ( $h$ ) es siempre la misma (cuando añadimos 1 m), independientemente del tamaño de la esfera.

## Siguiendo con el ecuador...

Uno de los principales fundadores de la teoría de la continuidad matemática fue el sacerdote católico austríaco, Bernhard Bolzano (1781-1848), cuyo libro póstumo, *Paradojas del Infinito* (1851), es un hito en el pensamiento matemático y lógico moderno. Bolzano reconoció la necesidad de definir, en el análisis de las paradojas del infinito, varios conceptos matemáticos aparentemente obvios, entre los que incluye el de continuidad. Uno de los teoremas de su libro sobre la función continua dice lo siguiente:



*“Una función continua de una variable  $x$ , positiva para algunos valores de  $x$  y negativa para otros y definida dentro de un intervalo cerrado de continuidad, debe tomar el valor cero para, por lo menos, un valor intermedio de  $x$ .”*

Un primer análisis superficial de la cuestión nos puede llevar a pensar que tal resultado es una obviedad que nadie estaría dispuesto a negar. Es como si una persona se encuentra en el sótano dos de unos grandes almacenes y decide subir al piso tercero. Es claro que deberá pasar por la planta baja. Un conocido mío, físico de formación, se mofaba de que los matemáticos dedicaran más de un folio a demostrar lo que él llamaba con sorna “El teorema del Corte Inglés”.

Parece obvio, pero, sin embargo...

¿Estaríamos dispuestos a asegurar que, considerando todos los puntos del ecuador de la Tierra, en cualquier momento, tenemos la certeza de que al menos dos puntos antípodas tienen la misma temperatura?

Esta afirmación ya no se nos presenta como obvia. Es más, nos parece incluso, muy arriesgada. Seguramente se nos antoja falsa. Sin embargo, es una consecuencia inmediata de considerar la temperatura como una función continua (es difícil negarlo) y de..., sí, efectivamente, del Teorema de Bolzano.

En efecto. Llamemos a la temperatura  $T$ , función continua, que toma en cada punto del ecuador puntos que identificaremos en el intervalo cerrado  $[0, 2\pi]$

$$T: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

con, obviamente,  $T(0) = T(2\pi)$ , pues 0 y  $2\pi$  son el mismo lugar.

A partir de ésta definimos otra, que también es continua:

$$f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = T(x + \pi) - T(x)$$

Si  $f(0) = 0$ , el postulado quedaría probado, pues sería  $T(\pi) = T(0)$  y, así, el pueblo correspondiente a  $x = 0$  tendría la misma temperatura que su antípoda. Si esto no ocurre, lo que sí pasa es que  $f$  toma valores de signo opuesto en sus extremos.

$$f(0) = T(\pi) - T(0)$$

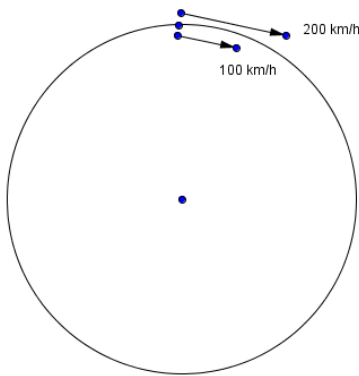
$$f(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = T(0) - T(\pi)$$

Aplicando a  $f$  el “obvísimo” Teorema de Bolzano, llegamos a la certeza de que existe al menos un valor intermedio  $\gamma$ , donde  $f$  se anula. Por tanto:

$$T(\gamma + \pi) = T(\gamma)$$

y este  $\gamma$  es el valor que corresponde al lugar donde ocurre lo que parecía, al principio, poco probable.

## 7. A vueltas con Harry Potter



La solución no es, claro, 150 km/h, porque está más tiempo viajando a 100 km/h que a 200 km/h.

Calcular exactamente la velocidad media de las dos vueltas es sencillo:

Llamemos  $e$  a la longitud de una vuelta (aunque no la sepamos) y  $t$  al tiempo que le cuesta dar la vuelta a 200 km/h. Así:

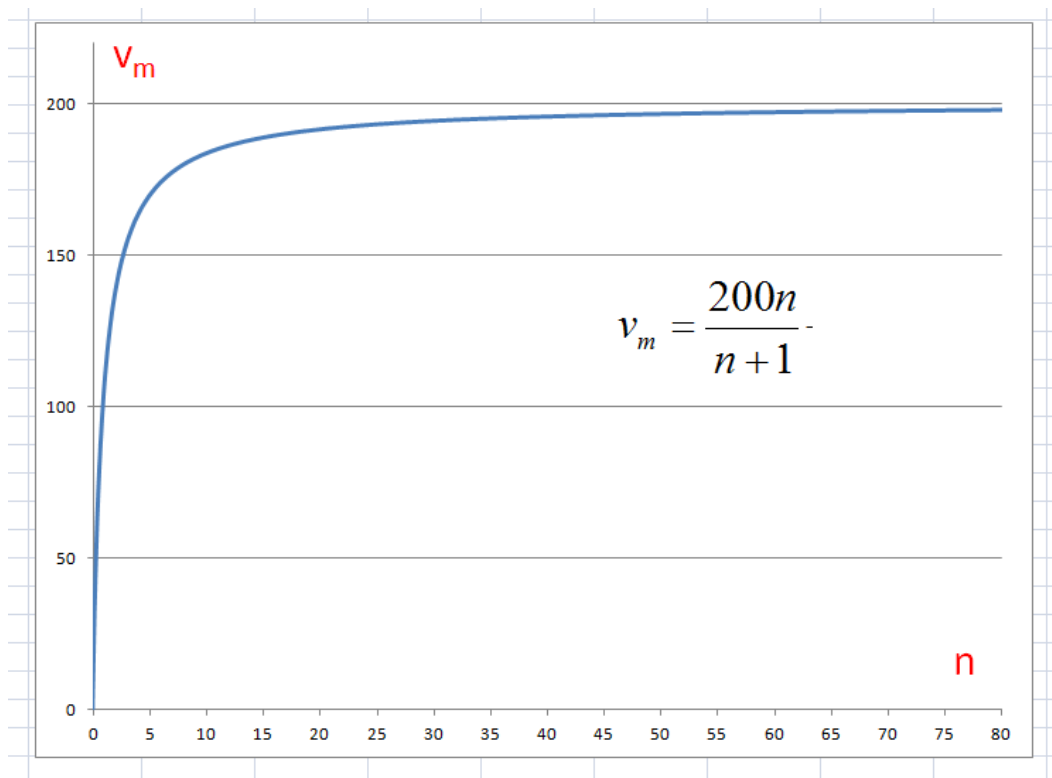
$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow \begin{aligned} 200 &= \frac{e}{t} \\ v_m &= \frac{2e}{3t} \end{aligned} \Rightarrow v_m = \frac{2}{3} 200 = 400 / 3 = 133,33 \text{ km/h}$$

Generalizando...

Si la 1ª vuelta la da a 100 km/h y la 2ª  $n$  veces *más deprisa*, tendremos, llamando  $e$  al espacio de una vuelta y  $t$  al tiempo invertido en la 2ª vuelta:

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow \begin{array}{l} 100 = \frac{e}{n \cdot t} \\ 100 \cdot n = \frac{e}{t} \end{array} \Rightarrow v_m = \frac{2 \cdot e}{t \cdot (n+1)} = \frac{200nt}{nt+t} = \frac{200n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 200 \text{ km/h}$$

Por muy deprisa que dé la segunda vuelta, nunca doblará, en velocidad media, la velocidad de la primera.



## 8. Números primos

Sorprendentemente, a pesar de que hay números "por todas partes" y "hasta el infinito", podemos encontrar en la sucesión de los números naturales un trozo de recta tan larga como se quiera en la que no haya ningún número primo. Y no solo eso: Puedo encontrar infinitos intervalos de esa longitud, en los que no haya ningún número primo.

### Un inciso

Se llama factorial de un número,  $n$ , y se denota así  $n!$  al producto

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\text{Así, } 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Este producto es tan importante en matemáticas que aparece en las calculadoras. Ten cuidado con él. Crece mucho más deprisa de lo que parece.

Un ejemplo curioso: Estamos en la Última cena: Cristo en medio, sentado (como aparece en los cuadros) en medio (en el centro) y los 12 apóstoles a su alrededor. Supón que antes de comenzar a cenar (la sopa está demasiado caliente) quieren sentarse de todas formas posibles (Cristo no se mueve). ¿Cuánto tiempo les llevaría sentarse de todas las maneras posibles, si en cada movimiento invierten 3 minutos, por ejemplo? ¿Se le enfriaría la sopa?



¡Muy bien!

12! Pero, ¡jojo! Este numerito es bastante más grande de lo que parece:

12!		
479.001.600	1.437.004.800	minutos
	23.950.080	horas
	997.920	días
	2.734	años

Aún estarían...

Volvamos a los números primos:

Veamos primero un caso "sencillo": Queremos conseguir 10 números naturales consecutivos y compuestos (no-primos).

Considerar  $11! = 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = N$

Considerar la lista  $N+2, N+3, \dots, N+10, N+11$ . Esta vale, puesto que  $N+2$  es múltiplo de 2,  $N+3$  es múltiplo de 3, etc.

Si quiero una lista de 37 números consecutivos no-primos elijo así:

$38!+2, 38!+3, \dots, 38!+36, 38!+37, 38!+38$

En general una lista de números no-primos de longitud  $m$ , a partir de  $(m+1)!$ :

$(m+1)!+2, (m+1)!+3, (m+1)!+4, \dots, (m+1)!+(m+1)$ .

Sorprendente, ¿no?

Lecturas recomendadas:

*Inspiración Ajá* de Martin Gardner.

En la web <http://calendas.ftp.catedu.es/00litemate.htm>

# Literatura matemática



**Coma flotante** PRIMER PREMIO DEL V CONCURSO DE CUENTOS "ADA BYRON

**Elogio de la ceguera** FINALISTA CONCURSO DE CUENTOS XXII HUCHA DE ORO

**Arcángeles** PRIMER PREMIO EN X PREMIO INTERNACIONAL JULIO CORTÁZAR DE RELATO BREVE (UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA)

**Principio de incertidumbre** PRIMER PREMIO DEL III CONCURSO DE RELATOS CORTOS RSME-ANAYA 2007

**El catálogo de Trendar B. Llessur** PRIMER PREMIO DEL III CONCURSO DE RELATOS CORTOS RSME-ANAYA 2008

**Bib** FINALISTA III CONCURSO DE RELATOS CORTOS RSME-ANAYA 2008

**El rey de bastos** ACCESIT PREMIOS DEL TREN 2008

**A cara o cruz** FINALISTA PREMIO CIUDAD DE HUESCA 2009

**Tú la llevas** ACCESIT PREMIOS DEL TREN 2011