Taller 18 octubre 2024

Matemáticas con las manos y con la cabeza: “Geometría conPlot”. Florencio Villarroya

Actividades previstas:

a) presentación del material.

b) manipulación de los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados.

c) construcción de los poliedros regulares. Teorema en acto “sólo existen cinco poliedros regulares”.

d) construcción de los deltaedros.

e) prismas y antiprismas; fórmula de Euler.

f) Fórmula de Descartes sobre el defecto esférico.

0.- Introducción.

Me presento como Florencio Villarroya, profesor de matemáticas jubilado, con tres hijos y siete nietos (una en primero de bachillerato y los siguientes en 4º, 3º, 2º y 1º de Secundaria, así que conozco bien el currículo de matemáticas).

Una asistente me dice que faltan dos. En efecto hay otras, en 5º y 1º de Primaria.

Lo primero que hago es dibujar (bastante mal) un triángulo y les pregunto qué es lo que he querido dibujar, dicen que un triángulo y les digo que es algo más, es equilátero. Observación dibujo mal hecho con las manos, pero idealizado con la cabeza en un triángulo equilátero. Dibujo a continuación (igual de mal) cuadrado, pentágono y hexágono. Les pregunto por el valor de su ángulo interior y responden correctamente.

A continuación presento a los participantes el material PLOT, Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, iniciales de las cuatro ciudades que a través de la APMEP (asociación de profesores de matemáticas de la enseñanza pública de Francia) difundieron este material.

Este material consiste en la familia de polígonos regulares más conocidos y que nos llevarán a construir los poliedros regulares, los deltaedros y los prismas y antiprismas.

A partir de aquí utilizamos sólo la palabra polígono para referirnos a los polígonos regulares y no ser reiterativos en el lenguaje.

1.- Primeros pasos.

La sesión empieza repartiendo a diferentes grupos diferentes polígonos, de manera que a unos se le entregan triángulos, a otros cuadrados, a otros pentágonos y a otros hexágonos.

Los que tienen pentágonos, enseguida construyen el dodecaedro, que lo reconocen.

Lo mismo sucede con los que tienen cuadrados, construyen un cubo.

De los que tienen hexágonos, empiezan a enlazarlos y no ven que sale un plano. Momento que aprovecho para decirles que … además de las manos hay que usar la cabeza. Pensar cuál es la medida de cada ángulo interior del hexágono y caer en la cuenta que como suman 360º, lo que están construyendo es un embaldosado plano y no una figura en el espacio.

A los que tienen cuadrados se les pregunta si podrán poner cuatro juntos en un mismo punto, a lo que la respuesta es no, pues estaríamos haciendo embaldosados planos y lo que en este taller se pretende es construir poliedros en el espacio.

Entre los que tienen triángulos hay más variedad. Algunos se conforman con construir un tetraedro (dicen que no se les ocurre otra cosa), pero otros construyen el icosaedro, y alguno el octaedro. Pero también en algún grupo hacen otro tipo de enlaces, es decir que no todos los vértices reúnen el mismo número de caras. Otros han construido poliedros cóncavos, les digo que de esos hay infinitos pegando tetraedros uno a continuación de otro, y como hay infinitos, pues no vamos a construirlos todos. Hago referencia a que hay infinitos números primos, pero que no conocemos todos.

Alguno de los grupos que tienen hexágonos hacen otras cosas. Unos han construido un tetraedro de arista 3 con una cara formada por un hexágono y tres triángulos, y otros construyen, sin saberlo, el sólido de Kelvin, pero solo con los hexágonos. Dejan unos huecos que corresponden a los cuadrados.

Cojo el tetraedro de arista tres y uno de arista uno y simulo que cojo agua con el de arista uno y la echo en el de arista tres, una vez, dos, tres, … y pregunto ¿Cuántas veces tengo que llenar el pequeño para rellenar el grande? Rápidamente alguien contesta qe 27 que es pr proporcionalidad.

(cuando hago lo del agua les pregunto si no han visto a Tip y Coll llenando con una jarra un vaso de agua y oh, no lo han visto ni siquiera en Nochevieja, ni saben ya quienes son!!!)

Les advierto que en la sesión de hoy sólo se podían usar un tipo de polígonos, que lo que han hecho lo veremos en la siguiente sesión.

Momento de recapitulación, aparecen aquí los cinco poliedros regulares conocidos, pero además otros más raros.

2.- Poliedros regulares

Si nos centramos en los regulares, les pido que cuenten caras, vértices y aristas de cada uno de ellos, como siempre, al contar las aristas o los vértices del dodecaedro y del icosaedro cometen algunos errores, por eso les pido que a partir del número de caras C, encuentren fórmulas sencillas para calcular el número de aristas A, pues en cada poliedro, sabiendo el número de caras, como se juntan dos en una arista, podemos encontrar una fórmula, por ejemplo, para el dodecaedro que tiene doce caras, el número de aristas se obtiene de la fórmula A = 5. 12 / 2 = 30. Para el mismo dodecaedro, el número de vértices V, también se obtiene a partir de C, puesto que concurren tres caras en cada vértice, ahora la fórmula es por tanto V = 5. 12 / 3 = 20.

Observamos que las mismas fórmulas sirven para todos los poliedros regulares. Es muy importante que las personas encuentren fórmulas sencillas por sí mismas (me estoy refiriendo a una de las cuatro fases de la situación fundamental de Didáctica del Profesor Guy Brousseau, fallecido en febrero de este año).

Alguno dice que la fórmula que pido es la de Euler, pero la mayoría la desconocen. Se verá en la siguiente sesión.

Les pregunto si han oído la palabra Teorema, conocen los de Pitágoras y Thales.

Entonces intento que entre todos enunciemos **un teorema:**

"Sólo existen cinco poliedros regulares"

Y les digo que eso exige una demostración, ya que todos los teoremas necesitan una demostración, o al menos una conjetura sobre la misma, para empezar.

La demostración se desarrolla más o menos así, con cuadrados sólo se puede construir un cubo, pues la única construcción posible espacial es concurriendo tres de ellos en un vértice, con dos es imposible y con cuatro hacemos un embaldosado plano.

Con el pentágono, nunca se pueden juntar cuatro. Por tanto solo hay un poliedro con caras pentagonales.

Con el hexágono, no se puede construir nada en el espacio, sólo sale el embaldosado.

Con polígonos de más lados, evidentemente, es imposible pues el ángulo interior es cada vez mayor, al aumentar el número de lados.

Con triángulos hay más posibilidades: Concurriendo tres triángulos en un vértice hay un único poliedro de cuatro caras, tetraedro (o pirámide triangular, para otros).

Concurriendo cuatro, tenemos el octaedro de ocho caras, y concurriendo cinco el icosaedro de veinte caras.

Demostración terminada.

Además de los nombres clásicos, de origen griego, les digo que hay una notación internacional para los poliedros. Así el tetraedro es 3^3, donde la base es el nº de lados del polígono y el exponente el nº de caras que se juntan en un vértice. El octaedro será 3^4, el icosaedro 3^5, el cubo 4^3, y el dodecaedro 5^3, de esta manera en cualquier lugar del mundo se pueden reconocer (ventajas de la universalidad de las matemáticas).

Hacemos una tabla reorganizando lo que hemos hecho hasta ahora:

	Caras	Aristas	Vértices
Tetraedro	4	6	4
Cubo	6	12	8
Octaedro	8	12	6
Dodecaedro	12	30	20
Icosaedro	20	30	12

3.- Observación (para el profesorado).

Creo que es muy importante que en las clases de matemáticas se demuestren la mayoría de los enunciados que se dan, pues sino, pasa de ser una ciencia a ser una creencia (es así porque lo dice nuestra/o profesor/a).

Observando la tabla vemos números que se repiten, por ejemplo, el nº de caras del cubo coincide con el nº de vértices del octaedro, ambos tienen el mismo número de aristas. La misma relación se da entre el dodecaedro y el icosaedro.

Intento visualizar la idea: Imaginad un cubo (el aula es parecida), pensad en el centro de cada cara unirlos entre sí (hago un dibujo con la mano en el aire) y ¿que sale? Un octaedro. Les llamamos pareja o duales, Lo mismo con el icosaedro y dodecaedro. El tetraedro se queda sólo, es pareja de sí mismo (es hermafrodita, el caracol de los poliedros). Los hijos de estas parejas los veremos en la próxima sesión.

4.- Hacia el teorema de Descartes.

A continuación se les pide hacer una observación, sobre los grados que faltan en cada vértice, si desplegamos la figura.

Por ejemplo, en el cubo faltan 90º, y si contamos lo que falta en total entre los ocho vértices:

8 . 90º = 720º

En el pentágono, hay que recordar lo que mide su ángulo interior, 108º, por tanto al juntar tres, tenemos 324º, por tanto faltan 36º, como hay 20 vértices:

20 . 36º = 720º.

En el tetraedro, que junta tres triángulos 180º, faltan otros 180º, por tanto como hay cuatro vértices:

4 . 180º = 720º.

En el octaedro que junta cuatro, faltan 120º, como hay 6 vértices:

6. 120º = 720º

En el icosaedro, juntando cinco en cada vértice, faltan 60º, como hay 12 vértices, también tenemos

12. 60º = 720º.

Con lo que tenemos un hecho notable que se puede comprobar en los casos citados y en los que veremos más adelante sin llegar a una demostración formal, pero es un importante resultado de la geometría de los poliedros que es el TEOREMA DE DESCARTES.

(Hago cha nananan con el violín, como hacía Tamariz, pero oh, no saben quién es Tamariz).

5.- Deltaedros.

Vuelvo a buscar a los grupos que han hecho otras figuras con triángulos, una de ellas está hecha con seis triángulos, por tanto es una bipirámide, con vértices de dos tipos.

Otros han construido otro deltaedro. Pero se han quedado parados. Entonces les digo que se fijen en el icosaedro y como la reina de corazones de Alicia que le corten la cabeza, entonces esa cabeza es una pirámide de base pentagonal, pero en la parte inferior hay otra igual, si las juntamos tenemos un poliedro de diez caras, muy bonito, que reúne en el vértice superior 5 triángulos, lo mismo en el inferior, pero en la parte central de la figura sólo concurren cuatro triángulos, es un poliedro de diez caras triangulares, en la que las aristas se cuentan o se calculan por la fórmula anterior

$A = 3 \cdot 10 / 2 = 15$

Y los vértices es más fácil contarlos que calcularlos, 7. El nombre coloquial de esta figura es "platillo volante".

Voy a la pizarra y hago con la ayuda de los asistentes una tabla con todos los poliedros que están formados por caras triangulares, incluidos los regulares y excluidos los que no son convexos, pues de éstos hay infinitos y nos quedamos sólo con los convexos.

A medida que se va construyendo la tabla con los poliedros construidos, van viendo las relaciones numéricas entre caras, aristas y vértices, cada vez que se añaden dos triángulos, se aumenta un vértice, dos caras y tres aristas, por tanto la elaboración de la tabla sirve para a partir de ella pensar cuántos elementos tiene el siguiente.

	Caras	Aristas	Vértices (por el nº de caras unidas)			V total
			3	4	5	
Tetraedro	4	6	4			4
Bipirámide triangular	6	9	2	3		5
Octaedro	8	12		6		6
Platillo volante	10	15		5	2	7
	12	18		4	4	8
	14	21		3	6	9
	16	24		2	8	10
Icosaedro	20	30			12	12

La sorpresa, que en el taller no se pudo explicar es que se espera que haya uno de 18 caras, pero exigiría, de acuerdo con la tabla … Lo dejo para que quien quiera lo piense.

Les digo que los poliedros tienen sus aplicaciones importantes en cristalografía y en biología, aplicaciones científicas positivas, pero también se han utilizado como armas de guerra: Cojo un tetraedro y les pido que imaginen sus alturas que se cortan en un punto. Desde ese punto hacia los cuatro vértices tenemos una figura que fabricada en hierro sirve como arma, ya en tiempos de los romanos, contra el enemigo, esparciéndolas por el suelo, ya que siempre al lanzarla se apoyará en tres puntos y el cuarto servirá para pinchar al enemigo. Es un ejemplo de la mala utilización de los progresos científicos. Así que aprovecho para pedir que se acaben los actuales conflictos bélicos, tanto entre Rusia y Ucrania, entre Israel y Palestina o en Sudán y otros tantos lugares.

Y la sesión no dio para más. En la siguiente trataremos los prismas, antiprismas y poliedros arquimedianos.

Entre todos desmontan las figuras y las recojo.

8.- Conclusión.

Se puede trabajar en matemáticas cuestiones tales como enunciar propiedades, intentar demostrarlas, generalizar, todo ello trabajando a la vez o alternando, las manos y la cabeza.