SUCESIONES "LOOK AND SAY"

JOSÉ MARÍA MUÑOZ ESCOLANO (jmescola@unizar.es)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS - FACULTAD DE EDUCACIÓN

TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO (4° E.S.O.)

18 DE OCTUBRE DE 2024

¿Conocéis alguna sucesión numérica?

¿Qué es una sucesión?

¿Habéis visto alguna en clase de Matemáticas?

Sucesiones aritméticas (progresiones aritméticas)

Ejemplos

¿Qué les pasa?

3
5
7
9
…

¿Cómo sigue?

¿Cuál es el término que está en la posición 10?

¿Cuál es el término que está en la posición 100?

¿Cómo son los elementos de esta sucesión?

¿Cuál es el término anterior a 141?

Sucesiones geométricas
(progresiones geométricas)

Ejemplos

¿Qué les pasa?

2
14
98
686
...

¿Cómo sigue?

¿Cuál es el término que está en la posición 10?

¿Cuál es el término que está en la posición 100?

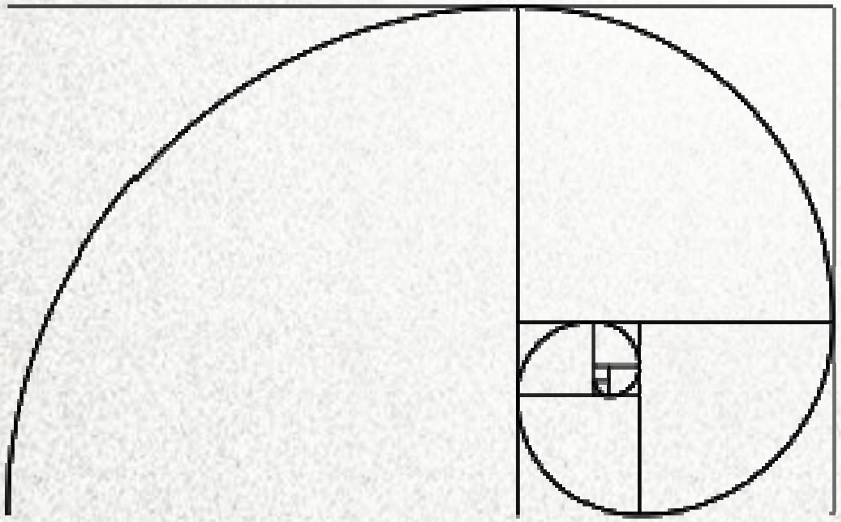
¿Cómo son los elementos de esta sucesión?

¿Cuál es el término anterior a 235298?

Otra sucesión "famosa":

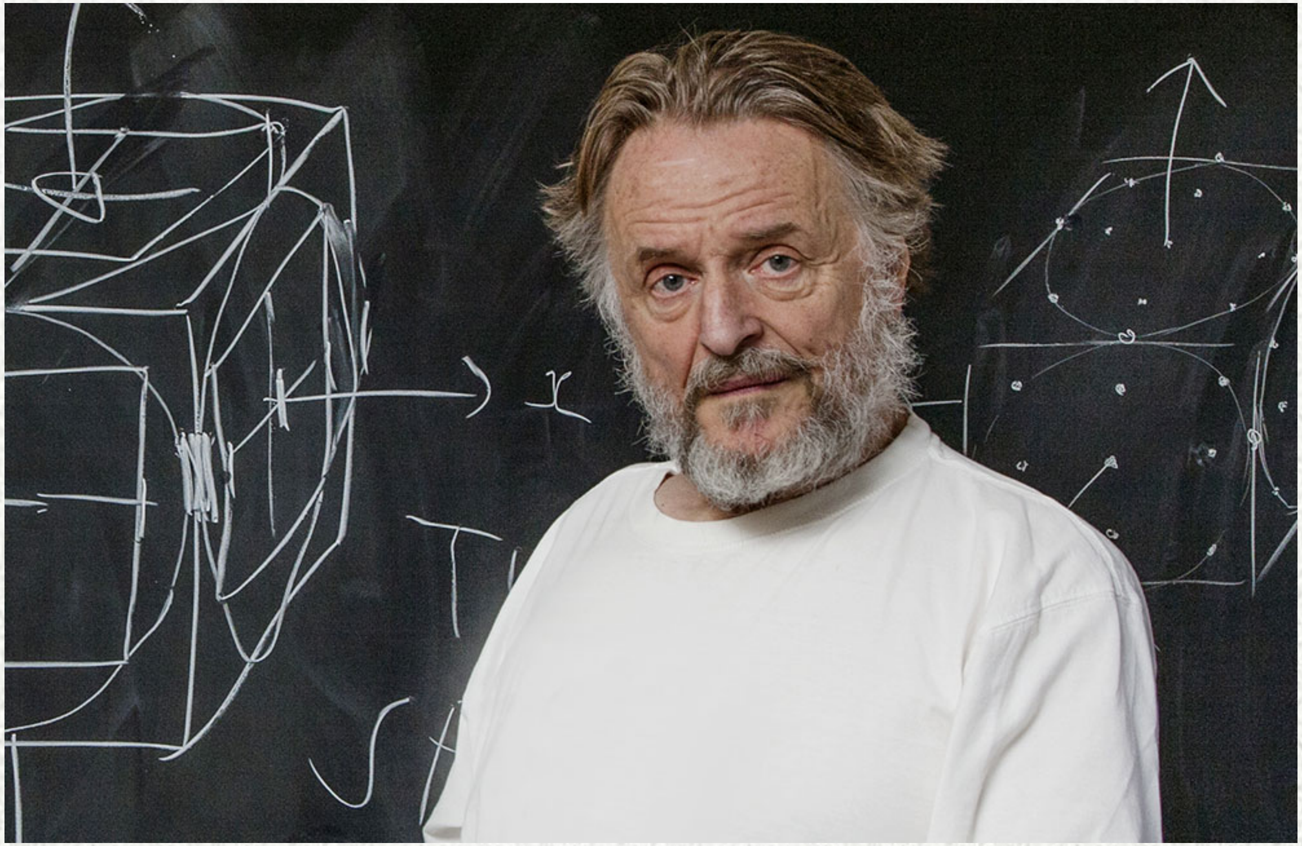
La sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, …



¿Es una progresión aritmética o geométrica como las anteriores?

Y AHORA
OTRAS SUCESIONES….



JOHN H. CONWAY

- Nacido en Liverpool, 1937.
  Fallecido en Nueva Jersey, 2020.

- Estudió en Cambridge

- Profesor de Matemáticas en la Universidad de Princeton

- Referente en el campo de la Teoría de juegos y de la Matemática recreativa

1

11

21

1112

3112

...

¿Cómo sigue?

¿Cuál es el término que está en la posición 10?

¿Cuál es término *n*-ésimo?

Sucesión ordenada "look and say" ("ver y decir")

1	Un uno
11	Dos unos
21	Un uno y un dos
1112	Tres unos y un dos
3112	
…	

Sucesión ordenada "look and say"
("ver y decir")

1	Un uno
11	Dos unos
21	Un uno y un dos
1112	Tres unos y un dos
3112	Dos unos, un dos y un tres
211213	

…

Sucesión ordenada "look and say"
("ver y decir")

1	Un uno
11	Dos unos
21	Un uno y un dos
1112	Tres unos y un dos
3112	Dos unos, un dos y un tres
211213	
…	

Siguiendo el mismo proceso el término 10 sería el

31121314

En el término 13 se alcanza el

21322314

Sucesión ordenada “look and say” **(“ver y decir”)**

Observamos las regularidades y nos preguntamos…

¿La sucesión se “para” siempre en un número? ¿Cómo tiene que ser ese número?

¿La sucesión se “para” siempre en un “ciclo” de números? ¿Cómo son esos ciclos (de dos números, de tres, de cuatro…)?

¿Qué pasa si incluimos los ceros?
¿Y si ponemos un inicio de sucesión muy muy grande?

On a Curious Property of Counting Sequences

Victor Bronstein and Aviezri S. Fraenkel

This note is dedicated to the memory of Professor Joseph Gillis who passed away on Nov. 18, 1993, in his 82nd year.

1. INTRODUCTION. A *counting sequence* $\mathscr{S}$ is a sequence of sequences $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$ of positive integers. The sequence S_{i+1} is obtained from S_i by counting the number m_k of times an integer k occurs in S_i and writing down in S_{i+1} the pairs m_k, k in increasing order of k, for all k for which $m_k > 0$.

Example. Beginning with $S_0 = (1)$, and with $S_0 = (6,7)$, the first few elements of the two resulting sequences $\mathscr{S}$ are depicted in Table 1.

TABLE 1. Initial elements of the counting sequences for $S_0 = (1)$ and $S_0 = (6,7)$

1	6 7
1 1	1 6 1 7
2 1	2 1 1 6 1 7
1 1 1 2	3 1 1 2 1 6 1 7
3 1 1 2	4 1 1 2 1 3 1 6 1 7
2 1 1 2 1 3	5 1 1 2 1 3 1 4 1 6 1 7
3 1 2 2 1 3	6 1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1 7
2 1 2 2 2 3	7 1 1 2 1 3 1 4 1 5 2 6 1 7
1 1 4 2 1 3	6 1 2 2 1 3 1 4 1 5 1 6 2 7
3 1 1 2 1 3 1 4	5 1 3 2 1 3 1 4 1 5 2 6 1 7
⋮	⋮

As usual, $\mathbb{Z}^0$ and $\mathbb{Z}^+$ denote the set of nonnegative integers and the set of positive integers respectively. The *length* $|S_i|$ of $S_i \in \mathscr{S}$ is the number of elements of S_i (counting multiplicities). Thus $|S_1| = 2$ for S_1 in the left column of Table 1, and $|S_1| = 4$ for S_1 in the right column. Any sequence of finite length is called *finite*. What is the asymptotic behavior of the sequences S_i? Does the length and hence the elements of $\{S_i\}$, grow without bound?

A counting sequence $\mathscr{S}$ is called *ultimately periodic* if there exist positive integers i_0 and p such that $S_i = S_{i+p}$ for all $i \ge i_0$. The smallest such p is called the *period* of $\mathscr{S}$, and the smallest such i_0 is called the *preperiod* of $\mathscr{S}$. For example, $S_0 = (2,2)$ is ultimately periodic with $i_0 = 0$ and $p = 1$, i.e., it is periodic with period 1 from the beginning. Our purpose is to prove the following surprising fact.

The Long and the Short on Counting Sequences

Jim Sauerberg and Linghsueh Shu

1. INTRODUCTION. Consider the sequence of positive integers $S_0 = 2,1,1,4$. S_0 consists of two 1's, one 2, and one 4, so let us define S_1 to be this description: $S_1 = 2,1,1,2,1,4$. Repeating this process, S_1 consists of three 1's, two 2's and one 4, so set $S_2 = 3,1,2,2,1,4$. Continuing in this way for several more steps produces

$$S_3 = 2,1,2,2,1,3,1,4$$
$$S_4 = 3,1,3,2,1,3,1,4$$
$$S_5 = 3,1,1,2,3,3,1,4$$
$$S_6 = 3,1,1,2,3,3,1,4.$$

In general, given any finite sequence of positive numbers S_0, this process of constructing S_{i+1} to be the sequence that counts how many times each number in S_i appears in S_i creates a *counting sequence* $\{S_i\}_{i\ge 0}$. As the reader certainly noticed, in our counting sequence we have $S_5 = S_6 = S_7 = \cdots$. In fact, in any counting sequence, because S_{i+1} is uniquely determined by S_i, if there exist numbers p and i such that $S_i = S_{i+p}$, then $S_{i'} = S_{i'+p}$ for all $i' \ge i$. We then say that $\{S_i\}_{i\ge 0}$ is *ultimately periodic*. The rather surprising main result of **[1]** is

Theorem 1. *For any finite sequence of positive integers S_0, the associated counting sequence $\{S_i\}_{i\ge 0}$ is ultimately periodic. In other words, given S_0 there are integers p_0 and p so that $S_{i+p} = S_i$ for all $i \ge p_0$.*

The smallest p_0 and smallest p satisfying Theorem 1 are called the *pre-period* and the *period* of the counting sequence $\{S_i\}$. Then a *periodic counting sequence* of period p, or simply a *p-cycle*, is a counting sequence of pre-period 0 and period p. For example, the counting sequence corresponding to $S_0 = 2,1,1,4$ has pre-period 5 and period 1, that is, it "ends" in a 1-cycle. Similarly, the counting sequence corresponding to $S_0 = 5,6$ ends in a two-cycle, and the counting sequence corresponding to $S_0 = 6,7$ ends in a three-cycle.

Several different types of counting sequences have been studied in recent years (see **[1]**, **[5]**, **[6]**, **[7]**, **[8]**, and M4779 in **[9]**). In this paper we consider these counting sequences, bring out their connections, and explore the periodic behavior of each. To expand on this, the questions we answer are:

1) What are the possible periods p? For each p, how many p-cycles are there? In Section 3 we find all possible periods and classify all cycles. Partial answers to these questions are given in **[6]**.
2) A puzzle of Raphael Robinson **[3**, pp. 389–390**]** asks the reader to place numbers in the blanks so that the following is true: "In this sentence, the number of occurrences of 0 is __, of 1 is __, of 2 is __, of 3 is __, of 4 is __, of 5 is __, of 6 is __, of 7 is __, of 8 is __, and of 9 is __." To find such a

Sucesión ordenada "look and say"
("ver y decir")

¿Qué características tiene un número de esta secuencia?

¿Cuántas cifras tienen estos números?

¿Qué cifras pueden aparecer en las posiciones impares? ¿Y en las posiciones pares?

¿El número 3421 puede ser un número de una sucesión ordenada "look and say"?

Sucesión ordenada “look and say” (“ver y decir”)

El problema de “volver hacia atrás” en la sucesión.

¿El término 2122 tiene un anterior en esta sucesión? ¿tiene varios posibles términos anteriores? ¿cuáles?

¿El término 2122 tiene un “anterior del anterior” en esta sucesión? ¿sólo uno?

Haz un diagrama de árbol para rastrearlos todos.

Sucesión look-and-say *original* (“sin ordenar”)

1

11

21

1211

111221

...

¿Cómo sigue?

¿Cuál es el término que está en la posición 10?

¿Cuál es término *n*-ésimo?

1

11

21

1211

111221

...

5.11 THE WEIRD AND WONDERFUL CHEMISTRY OF AUDIOACTIVE DECAY

J. H. Conway

Department of Mathematics
Princeton University
Princeton, NJ 08544

1. **Introduction**

Suppose we start with a string of numbers (i.e., positive integers), say

5 5 5 5 5.

We might describe this in words in the usual way as "five fives," and write down the *derived* string

5 5.

This we describe as "two fives," so it yields the next derived string

2 5

which is "one two, one five," giving

1 2 1 5

namely, "one one, one two, one one, one five," or

1 1 1 2 1 1 1 5

and so on. What happens when an arbitrary string of positive integers is repeatedly derived like this?

I note that more usually one is given a sequence such as

55555 ; 55 ; 25 ; 1215 ; 11121115 ;

and asked to guess the generating rule or the next term.

The numbers in our strings are usually single-digit ones, so we'll call them *digits* and usually cram them together as we have just done. But occasionally we want to indicate the way the number in the string was obtained, and we can do this neatly by inserting commas recalling the commas and quotes in our verbal descriptions, thus:

¡¡ES MUCHO MÁS DIFÍCIL!!

1

11

21

1211

111221

...

Crece continuamente. No se "estaciona" y no tiene "ciclos" (salvo para un número en concreto, ¿cuál?)

Conway en 1986 probó que la razón entre el número de cifras de un término y el número de cifras del término siguiente tendía a
$\lambda = 1.303577269034\ldots$
donde λ era una única solución positiva de la ecuación:

$$x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6 = 0$$

1

11

21

1211

111221

…

No obstante, tiene una buena propiedad:

la “vuelta atrás” en esta sucesión es muy sencilla…

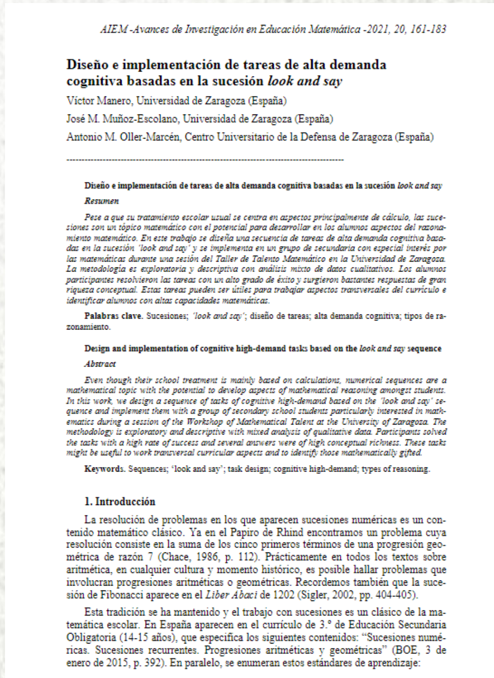
¿Cuál es el anterior a 11121115?

¿Y el anterior al anterior?

PARA AMPLIAR:

Gairín, J.M., Manero, V., Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2017). La sucesión Look and Say. En *Actas del VIII CIBEM - Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* CB-603 (pp. 16-24). FESPM.

Manero, V., Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A. M. (2021). Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. *Avances de investigación en educación matemática, (20)*, 161-183.



AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática -2021, 20, 161-183

Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión *look and say*

Víctor Manero, Universidad de Zaragoza (España)
José M. Muñoz-Escolano, Universidad de Zaragoza (España)
Antonio M. Oller-Marcén, Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (España)

Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión *look and say*

Resumen

Pese a que su tratamiento escolar usual se centra en aspectos principalmente de cálculo, las sucesiones son un tópico matemático con el potencial para desarrollar en los alumnos aspectos del razonamiento matemático. En este trabajo se diseña una secuencia de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión 'look and say' y se implementa en un grupo de secundaria con especial interés por las matemáticas durante una sesión del Taller de Talento Matemático en la Universidad de Zaragoza. La metodología es exploratoria y descriptiva con análisis mixto de datos cualitativos. Los alumnos participantes resolvieron las tareas con un alto grado de éxito y surgieron bastantes respuestas de gran riqueza conceptual. Estas tareas pueden ser útiles para trabajar aspectos transversales del currículo e identificar alumnos con altas capacidades matemáticas.

Palabras clave. Sucesiones; *'look and say'*; diseño de tareas; alta demanda cognitiva; tipos de razonamiento.

Design and implementation of cognitive high-demand tasks based on the *look and say* sequence

Abstract

Even though their school treatment is mainly based on calculations, numerical sequences are a mathematical topic with the potential to develop aspects of mathematical reasoning amongst students. In this work, we design a sequence of tasks of cognitive high-demand based on the 'look and say' sequence and implement them with a group of secondary school students particularly interested in mathematics during a session of the Workshop of Mathematical Talent at the University of Zaragoza. The methodology is exploratory and descriptive with mixed analysis of qualitative data. Participants solved the tasks with a high rate of success and several answers were of high conceptual richness. These tasks might be useful to work transversal curricular aspects and to identify those mathematically gifted.

Keywords. Sequences; 'look and say'; task design; cognitive high-demand; types of reasoning.

1. Introducción

La resolución de problemas en los que aparecen sucesiones numéricas es un contenido matemático clásico. Ya en el Papiro de Rhind encontramos un problema cuya resolución consiste en la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica de razón 7 (Chace, 1986, p. 112). Prácticamente en todos los textos sobre aritmética, en cualquier cultura y momento histórico, es posible hallar problemas que involucran progresiones aritméticas o geométricas. Recordemos también que la sucesión de Fibonacci aparece en el *Liber Abaci* de 1202 (Sigler, 2002, pp. 404-405).

Esta tradición se ha mantenido y el trabajo con sucesiones es un clásico de la matemática escolar. En España aparecen en el currículo de 3.º de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años), que especifica los siguientes contenidos: "Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas" (BOE, 3 de enero de 2015, p. 392). En paralelo, se enumeran estos estándares de aprendizaje:

¡¡MUCHAS GRACIAS!!