# Preparación Olímpica I

Glenier Bello (gbello@unizar.es)

**Problema 1.** Demostrar que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 3.

*Solución.* Sea $n$ un número natural. Lo expresamos en base 10 como

$$n = r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \ldots + r_k \cdot 10^k,$$

es decir, $r_0$ es la cifra de las unidades, $r_1$ la de las decenas, $r_2$ la de las centenas, etc. Como $10^i \equiv 1 \pmod 3$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$, tenemos que

$$r_0 + r_1 \cdot 10 + r_2 \cdot 10^2 + \cdots \equiv r_0 + r_1 + r_2 + \cdots \pmod 3,$$

es decir, el número $n$ es congruente a la suma de sus cifras módulo 3. Como "ser divisible por 3" es lo mismo que "ser congruente con 0 módulo 3", obtenemos que $n$ es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es divisible por 3. $\square$

**Problema 2.** Sea $n$ un número impar no divisible por 3. Probar que $n^2 - 1$ es divisible por 24.

*Solución.* Como $24 = 3 \cdot 8$ y $\operatorname{mcd}(3, 8) = 1$, "ser divisible por 24" es lo mismo que "ser divisible por 3" y "ser divisible por 8". Veamos entonces que $n^2 - 1$ es divisible por 3 y por 8.

Como $n$ no es divisible por 3, $n \equiv 1 \pmod 3$ o $n \equiv 2 \pmod 3$. En ambos casos

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod 3.$$

Es decir, $n^2 - 1$ es divisible por 3. Veamos ahora que $n^2 - 1$ es divisible por 8. Sean $m, k \in \mathbb{Z}$ tales que $n = 8m + k$, con $0 \leq k \leq 7$. Como $n$ es impar, tenemos que $k \in \{1, 3, 5, 7\}$. Notar que entonces $k^2 \equiv 1 \pmod 8$, y en consecuencia

$$n^2 - 1 \equiv k^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8,$$

como queríamos probar. $\square$

**Problema 3.** Demostrar que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

*Solución.* Notar que $2222 \equiv 3 \pmod 7$ y $5555 \equiv 4 \pmod 7$. Por tanto,

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \pmod 7.$$

Por el pequeño teorema de Fermat (o simplemente haciendo cuentas),

$$3^6 \equiv 1 \pmod 7 \qquad \text{y} \qquad 4^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Como $2222 \equiv 2 \pmod 6$ y $5555 \equiv 5 \pmod 6$, tenemos que

$$3^{5555} + 4^{2222} \equiv 3^5 + 4^2 \equiv 5 + 2 \equiv 0 \pmod 7.$$

Por tanto $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0 \pmod 7$, como queríamos probar. □

**Problema 4.** Probar que existen infinitos primos de la forma $4k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

*Solución.* Primero notemos que existe al menos un primo $p$ congruente con 3 módulo 4: el propio $p = 3$. Supongamos que sólo hubiese un número finito de primos congruentes con 3 módulo 4, digamos $p_1, \dots, p_k$. Sea $P := p_1 \cdots p_k$ el producto de todos ellos. Tenemos que $4P - 1 \equiv 3 \pmod 4$. Si todos los divisores primos de $4P - 1$ son congruentes con 1 módulo 4, entonces $4P - 1$ sería congruente con 1 módulo 4. Luego algún divisor primo de $4P - 1$ tiene que ser congruentes con 3 módulo 4. Por otro lado, $\operatorname{mcd}(4P - 1, p_i) = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. En consecuencia, tiene que existir otro primo congruente con 3 módulo 4; contradicción. □

**Problema 5.** Demostrar que si en un triángulo rectángulo las longitudes de sus tres lados son números naturales entonces el producto de ellas es múltiplo de 60.

*Demostración.* Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ lados de un triángulo rectángulo, siendo $c$ la hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras,

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (*)$$

Veamos que $abc$ es múltiplo de 60. Esto equivale a probar que $abc$ es múltiplo de 3, 4 y 5.

- *$abc$ es múltiplo de* 3.
  Notar que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, si $n \equiv 0 \pmod 3$ entonces $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, mientras que si $n \equiv 1 \pmod 3$ o bien $n \equiv 2 \pmod 3$ entonces $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Por tanto, viendo la ecuación $(*)$ módulo 3 deducimos que alguno de los tres lados tiene que ser múltiplo de 3. Por tanto $abc$ es múltiplo de 3.

- *$abc$ es múltiplo de* 4.
  Por $(*)$, alguno de los tres lados es par. Supongamos primero que $c$ es par. Entonces

  $$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4. \qquad (**)$$

  Notar que, dado $n \in \mathbb{Z}$, si $n$ es par entonces $n^2 \equiv 0 \pmod 4$ mientras que si $n$ es impar entonces $n^2 \equiv 1 \pmod 4$. Luego, por $(**)$, o bien $a$ es par o bien $b$ es par; en ambos casos $abc$ es múltiplo de 4.

  Supongamos ahora que $a$ es par. (Por simetría en $a$ y $b$, el argumento es análogo si $b$ es par.) Si $b$ o $c$ son pares, entonces ya tentemos que $abc$ es múltiplo de 4. Supongamos que $b$ y $c$ son impares. Notar que esto implica que $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 8$. Luego, viendo la ecuación $(*)$ módulo 8 tenemos que $a^2 \equiv 0 \mod 8$, lo cual equivale a que $a$ sea múltiplo de 4. Por tanto, en ese caso también tenemos que $abc$ es múltiplo de 4.

- *abc es múltiplo de* 5.
  Notar que, dado $n \in \mathbb{Z}$, si $n \equiv 0 \pmod 5$ entonces $n^2 \equiv 0 \pmod 5$, si $n \equiv 1 \pmod 5$ o $n \equiv 4 \pmod 5$ entonces $n^2 \equiv 1 \pmod 5$, y si $n \equiv 2 \pmod 5$ o $n \equiv 3 \pmod 5$ entonces $n^2 \equiv 4 \pmod 5$. Por tanto, viendo la ecuación $(*)$ módulo 5 deducimos que alguno de los lados $a$, $b$ o $c$ tiene que ser congruente con 0 módulo 5 (el resto de combinaciones contradicen $(*)$). Luego $abc$ es múltiplo de 5, como queríamos probar.

Queda así probado que $abc$ es múltiplo de 60. □

**Problema 6.** Sea $n$ un entero no negativo. Probar que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ siempre es divisible por algún número del conjunto $\{3, 5, 13\}$.

*Demostración.* Para cada $n \geq 0$, sea

$$f(n) := 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Notar que $f(0) = 6$ es múltiplo de 3. Supongamos que $n \geq 1$. Observemos que

$$f(n) \equiv 1 + (-1)^n + 0 + 1 + (-1)^n + 0 \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \pmod 3.$$

Luego si $n$ es impar se cumple el enunciado. Supongamos entonces que $n$ es par, digamos $n = 2m$. Notar que

$$f(2m) \equiv 1 + (-1)^m + (-1)^m + 1 + 0 + 1 \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par} \\ 1 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \pmod 5.$$

Luego si $m$ es par se cumple el enunciado. Supongamos entonces que $m$ es impar, digamos $m = 2k + 1$. Por tanto $n = 2m = 2(2k + 1) = 4k + 2$. Notar que

$$f(4k + 2) \equiv 1 + 4 \cdot 3^k + 9 \cdot 3^k + 3 \cdot 9^k - 1 - 3 \cdot 9^k \equiv 0 \pmod{13},$$

luego en este caso también queda probado el enunciado. □

**Problema 7.** Hallar todos los primos $p$ y $q$ tales que $p + q = (p - q)^3$.

*Solución.* Los únicos primos son $p = 5$ y $q = 3$.

Como $(p - q)^3 = p + q > 0$, tiene que ser $p > q$. En particular, $p$ y $q$ son primos entre sí. Como $p - q \equiv 2p \pmod{p + q}$, tomando módulo $p + q$ en la ecuación dada tenemos que

$$8p^3 \equiv 0 \pmod{p + q}.$$

Como $p$ y $q$ son primos entre sí, también lo son $p$ y $p + q$. Luego

$$8 \equiv 0 \pmod{p + q};$$

es decir, $p + q$ divide a 8. Por tanto, el único caso posible es $p = 5$ y $q = 3$. □