SOLUCIONES

1. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma.

   Hallar la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas. (Fase Local OME 2010)

   Solución:

   Una forma de hacer una disposición en la que no haya dos hayas consecutivas puede ser imaginar plantados todos los robles y todas las encinas y colocar las cinco hayas entre los huecos y los extremos; tenemos pues ocho sitios donde colocar las hayas.

   El problema puede plantearse de dos maneras distintas aunque el resultado final es el mismo.
   I) Suponemos que no es posible distinguir los robles entre sí, las encinas entre sí, ni las hayas entre sí. En este caso, el número total de disposiciones será igual a las permutaciones con repetición de 12 elementos, de los que 3, 4 y 5 son iguales entre sí; esto es $\frac{12!}{3!4!5!}$.

   El número de disposiciones favorables es igual a las combinaciones de 8 elementos tomados de 5 en 5 multiplicado por el número de permutaciones con repetición de 7 elementos de los que 3 y 4 son iguales entre sí. La probabilidad es:

   $$p_1 = \frac{\frac{8!}{5!3!}\frac{7!}{3!4!}}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7}{11 \cdot 9} = \frac{7}{99}$$

   II) Suponemos que es posible distinguir entre los robles, encinas y hayas. En este caso el número total de disposiciones es 12!, y el de disposiciones favorables es el producto de 7 ! (la forma de colocar los robles y las encinas) por $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ (las formas de colocar las hayas de forma que no haya dos consecutivas). La probabilidad es:

   $$p_2 = \frac{7! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{12!} = \frac{7}{11 \cdot 9} = \frac{7}{99}.$$

2. Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que

cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a|b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible. (Fase Local OME 2023)

Solución:

Vamos a demostrar que el menor valor posible es $n = 11$. Comenzamos notando que cada uno de los números $2^0, 2^1, ..., 2^{10}$ tiene que ser de un color diferente, con lo que hay que usar por lo menos 11 distintos.

Consideremos ahora la siguiente coloración. Pintamos el número 1 del color uno; los números 2 y 3 del color dos; y en general los números del 2^{k-1} al 2^{k+1} con el color k, donde $1 \leq k \leq 11$ (obviamente, cuando $k = 11$ solo pintamos hasta 2023). De esta manera, el cociente de dos números que comparten color es menor que dos. Esto significa que ninguna pareja del mismo color satisface una relación de divisibilidad, y hemos concluido.

3. Saber cual es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, ¿pero cuántos ceros preceden a esta última cifra? (Fase Local OME 2011)

Solución:

Si $n \geq 1$,

$$2009^n = (2000 + 9)^n = 9^n + 2000k$$

Por lo tanto, las tres últimas cifras de 2009^n coinciden con las de 9^n. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$$9^{2011} = (10-1)^{2011} = (-1)^{2011} + \binom{2011}{1}(-1)^{2010} \cdot 10 + \binom{2011}{2}(-1)^{2009} \cdot 10^2 + K \cdot 10^3$$

Si tomamos congruencias módulo 1000, nos queda

$$9^{2011} \equiv -1 + 110 - 11 \cdot 5 \cdot 100 \pmod{1000}$$

Así, obtenemos que nuestra cantidad es congruente a $-391 \equiv 609 \pmod{1000}$. Luego nuestro número acabará en 609 y la respuesta es que al 9 de la última cifra le precede un único cero.

4. En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: ¿hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha? Determinar cuántos mentirosos hay en la fila. (Fase Local OME 2022)

Solución:

Vamos a numerar a las personas de izquierda a derecha según su posición en la fila como $p_1, p_2, ..., p_{2022}$. En primer lugar, probaremos que todos los p_i con $1 \leq i \leq 1011$ son mentirosos. En el caso de p_1, como no hay personas a su izquierda, sabemos que el enunciado no puede ser cierto, con lo que necesariamente p_1 ha de ser un mentiroso. Sea $p_k + 1$ la primera persona que dice la verdad, tiene k mentirosos a su izquierda y por tanto un máximo de $k-1$ personas que dicen la verdad a su derecha, con lo que hay estrictamente más de $2021-2k$ mentirosos a su derecha. Tomemos ahora el mentiroso más a la derecha. Este tendría al menos $2021-2k+k = 2021-k$ mentirosos a su izquierda y a lo sumo $k-1$ que dicen la verdad a su derecha. Como es un mentiroso, ha de pasar que $2021-k \leq k-1$, lo cual implica que $k \geq 1011$. Luego las primeras 1011 personas mienten y la primera persona que puede decir la verdad es p_{1012}. Vamos a probar ahora que las 1011 personas restantes dicen la verdad. Tomemos a un individuo cualquiera p_k, con $1012 \leq k \leq 2021$. Esta persona tendrá al menos a 1011 mentirosos a su izquierda, que siempre serán más que los que tenga a su derecha. Así que necesariamente deberá decir la verdad. Por tanto, se concluye que 1011 personas mienten y 1011 dicen la verdad.

5. Sea $n > 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que siempre que formamos n parejas con dos bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.

   a) Demuestra que hay 4 bolas con el mismo número.

   b) Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es $n-1$.

   (Fase Local OME 2015)

   Solución:

   a) Sean los valores de las bolas en orden creciente $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2n}$. Formemos la pareja k-ésima emparejando la bola a_{2k-1} con la a_{2k} para $k = 1, 2, \ldots, n$, con lo que sus sumas son:

   $$s_1 = a_1 + a_2 \geq s_2 = a_3 + a_4 \geq \ldots \geq s_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

   Al estar las sumas en orden no creciente, si dos de ellas son iguales tienen que ser dos sumas consecutivas. Es decir, ha de ser $a_{2k-1} + a_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$, con $a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq a_{2k+1} \geq a_{2k+1}$, luego obviamente estos cuatro enteros han de ser iguales.

   b) Supongamos que hay al menos n valores distintos, que podemos ordenar en orden decreciente $b_1 > \ldots > b_n$. Ordenamos los valores de las restantes n bolas en orden no creciente $c_1 \geq \ldots \geq c_n$. Haciendo las parejas (b_i, c_i) para $i = 1, 2, \ldots, n$, es claro que las parejas i-ésima e $i+1$-ésima tienen valores $b_i + c_i > b_{i+1} + c_{i+1}$, con lo que las parejas están ordenadas con valores de suma estrictamente decrecientes, y no puede haber dos con la misma suma. Llegamos a una contradicción. Luego hay a lo sumo $n-1$ valores distintos.

6. Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara? (Fase Local OME 2007)

   Solución:

   Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores. Puesto que cada vértice ha de estar exactamente en una cara cuadrada, debe haber $V = 4 \cdot 12 = 48$ vértices. (Se obtendría el mismo resultado haciendo la cuenta con los hexágonos o los octógonos).

   Como de cada vértice salen exactamente 3 aristas, hay $A = \frac{3V}{2} = 72$ aristas. Cada cuadrado tiene 2 diagonales, cada hexágono 9 y cada octógono 20 ($d = \frac{n(n-3)}{2}$), por tanto $D = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 20 = 216$ diagonales sobre las caras. Así, el número pedido I será igual al total de pares que se puedan formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, y restando las aristas y las diagonales sobre las caras. Es decir,

   $$I = \binom{48}{2} - A - D = 840.$$

7. Ana y Benito juegan a un juego que consta de 2020 rondas. Inicialmente, en la mesa hay 2020 cartas, numeradas de 1 a 2020, y Ana tiene una carta adicional con el número 0. En la ronda k-ésima, el jugador que no tiene la carta $k-1$ decide si toma la carta k o si se la entrega al otro jugador. El número de cada carta indica su valor en puntos. Al terminar el juego, gana quien tiene más puntos. Determina qué jugador tiene estrategia ganadora, o si ambos jugadores pueden forzar el empate, y describe la estrategia a seguir. (OME 2020)

   Solución:

   Ambos jugadores pueden forzar el empate. Dividimos el juego en 505 etapas, cada una con cuatro rondas consecutivas de la forma $\{k, k+1, k+2, k+3\}$. Vamos a demostrar que cada jugador puede conseguir al menos la mitad de los puntos de cada etapa, independientemente de qué jugador tenga la carta $k-1$. No importa qué ocurra en la k-ésima ronda. A partir de ahí:

   - El jugador que recibe la carta k (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es Ana) puede asegurase al menos el empate en la etapa de 4 turnos. En efecto, si Benito le entrega también la carta $k+1$ y la carta $k+2$, entonces Ana ya ha recibido $3k+3$ puntos y gana la etapa de 4 turnos. Si Benito entrega a Ana la carta $k+1$ y se queda la $k+2$, Ana toma la carta $k+3$ y gana la etapa de 4 turnos. Si Benito se queda la carta $k+1$, Ana entrega la carta $k+2$ a Benito y se queda con la carta $k+3$, con lo que empata la etapa de 4 turnos. En resumen, quien recibe la carta k siempre puede conseguir al menos el empate.

- El jugador que no recibe la carta k (sin pérdida de generalidad, Benito) se queda con la carta $k+1$. Si Ana le entrega la carta $k+2$, Benito ya tiene $2k+3$ puntos y se garantiza el empate en la etapa de 4 turnos. Si Ana se queda la carta $k+2$, Benito se queda con la carta $k+3$, con lo que acaba con $2k+4$ puntos y gana la etapa de 4 turnos. En resumen, quien no recibe la carta k siempre puede conseguir al menos el empate.

8. En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que independientemente de cuales sean los n segmentos elegidos y de como de haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color. (OME 2011)

   Solución:

   Veamos en primer lugar que con $\mathrm{n} = 2010$ no es suficiente.
   Diremos que un segmento es de tamaño r, si une dos vértices entre los que siguiendo el camino más corto por los lados del polígono hay otros $r-1$ vértices. Elegimos los 2010 segmentos de tamaño mayor que 3 (De tamaño mayor que 3 hay $60 \cdot 67/2 = 2010$ segmentos exactamente). Para cada r entre 1 y 10 asignamos el color r a los segmentos de tamaño $3\mathrm{r}+1, 3\mathrm{r}+2, 3\mathrm{r}+3$ (notar que el tamaño máximo es 33). Es claro que cada vértice pertenece a 6 segmentos de cada color.

   Ahora probaremos que si $\mathrm{n} = 2011$ hay algún vértice que está en 7 segmentos del mismo color. En los 2011 segmentos intervienen contando repeticiones 4022 vértices, luego por el principio del palomar como $4022 > 60 \cdot 67$, algún vértice interviene en al menos 61 segmentos, de los cuales de nuevo por el principio del palomar al menos 7 serán del mismo color.