COMBINATORIA

1. Definiciones

Def (Factorial): Dado un número entero no negativo n, se define el factorial de n ($n!$) como el producto $n! = n(n-1)\dots 1$.

Def (Número combinatorio): Dados dos números n, k enteros no negativos tales que $n \geq k$, se define el número combinatorio n sobre k, y se escribe $\binom{n}{k}$, como el cociente

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Propiedades de los números combinatorios:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

i) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binomio de Newton

Dado n número positivo se tiene que:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots \binom{n}{n}y^n$$

Dando valores x = y = 1, se obtiene la igualdad:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n}$$

2. Técnicas de recuento

2.1. Varaciones sin repetición

Dado un conjunto de n elementos se denomina variaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k $\left(V_n^k\right)$ como el número de subconjuntos ordenados que se pueden formar con k elementos distintos del conjunto. Es decir, consideramos que dos subconjuntos son distintos si tienen algún elemento distinto o lo tienen en distinto orden.

Ejemplo: formas de repartir las medallas de oro, plata y bronce entre 8 participantes.

Forma de calcularlo

$$V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Esta fórmula es fácil de deducir: queremos formar sucesiones ordenadas de k elementos distintos de entre los n originales. Para el elegir el primer puesto de la sucesión tenemos n opciones (cada uno de los elementos), una vez fijado el primero tenemos $n-1$ opciones (todos los elementos menos el elegido antes). Una vez hemos fijado todos menos uno nos quedan $n-(k-1)$ opciones.

2.2. Variaciones con repetición

Dado un conjunto de n elementos se denomina variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k $\left(VR_n^k\right)$ como el número de subconjuntos ordenados que se pueden formar con k elementos distintos o no del conjunto. Es decir, consideramos dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto o lo tienen en distinto orden.

Ejemplo: Número de resultados posibles de una quiniela de fútbol.

Forma de calcularlo

$$VR_n^k = n^k$$

Esta fórmula se deduce de la siguiente manera: queremos formar sucesiones ordenadas de k elementos distintos o no de los n originales. Así, cada vez que elegimos un puesto cualquiera del conjunto ordenado, tenemos n opciones, ya que están a nuestra disposición todos los elementos del conjunto original.

2.3. Permutaciones sin repetición

Dado un conjunto de n elementos se denomina permutaciones sin repetición de n elementos (P_n) como el número de subconjuntos ordenados que se pueden formar con los n elementos del conjunto sin que haya ninguno repetido. Es decir, consideramos dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento en distinto orden.

Ejemplo: Formas de ordenar 10 libros en una estanteria.

Forma de calcularlo

$$P_n = n!$$

Esta fórmula es inmediata si nos fijamos en que $V_n^n = P_n$.

2.4. Permutaciones con repetición

Dado un conjunto de n elementos con r elementos distintos $(1, ..., r)$, de modo que el elemento i-ésimo está repetido k_i veces (es decir, $k_1 + \ldots k_r = n$), se define las permutaciones con repetición $\left(P_n^{k_1,\ldots,k_r}\right)$ como el número de formas distintas de ordenar nuestros n elementos, considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento en distinto orden (los elementos repetidos son indistinguibles unos de otros).

Ejemplo: Formas de colocar 5 pelotas de las cuales 2 son amarillas y 3 azules.

Forma de calcularlo

$$P_n^{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}$$

Para hallar la fórmula, se hacen las permutaciones del total de elementos n y se divide por el número de permutaciones iguales al contar los k_i elementos i como distintos.

2.5. Combinaciones sin repetición

Dado un conjunto de n elementos se denomina combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k $\left(C_n^k\right)$ al número de subconjuntos no ordenados que se pueden formar con k elementos distintos del conjunto. Es decir, consideramos dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto, sin importar el orden en que se encuentren.

Ejemplo: Formas de elegir un equipo de 5 personas entre los 25 estudiantes de una clase.

Forma de calcularlo

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{P_k}$$

La fórmula se obtiene al considerar el número de variaciones (subconjuntos considerando el orden) y dividirlo por las posibles ordenaciones de cada subconjunto (ya que ahora no se tiene en cuenta el orden).

2.6. Combinaciones con repetición

Dado un conjunto de n elementos distintos se denomina combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k $\left(CR_n^k\right)$ al número de subconjuntos que se pueden formar con k elementos distintos o no del conjunto. Considerando dos subconjuntos distintos si tienen algún elemento distinto, sin importar el orden en que se encuentren.

Ejemplo: Se tienen pelotas de fútbol y baloncesto, formas de elegir 5 pelotas.

Forma de calcularlo

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

3. Principio del Palomar (o Teorema de Dirichlet)

Este teorema surge originariamente de la observación de que si posees un numero de palomas superior al numero de nidos en los que deben ser colocadas, en un nido tendrá que haber al menos 2 palomas.

De manera más general, sabemos que si tenemos n elementos que quieres repartir en m grupos:

$$\mathrm{n} = \mathrm{cm} + \mathrm{r}$$

Siendo c el cociente de la división entera y r el resto. El principio del palomar nos dice que si r es distinto de cero, entonces se puede concluir que en uno de los grupos habrá al menos $c + 1$ elementos.

Ejemplo: La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demostrar que podrías haber elegido al menos a 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuese menor que 51 años. (Fase local 2004)

Solución: Podemos aplicar el principio del palomar de la siguiente manera. Dividimos a los 120 estudiantes en 40 grupos de 3 personas, si dividimos la suma de las edades por los 40 grupos obtenemos:
$2002 = 40 \times 50 + 2$
Por el principio del palomar habrá al menos un grupo cuya suma de las edades de sus tres miembros sea $c + 1$, como en este caso c = 50, habrá un grupo tal que la suma de las edades de sus miembros sea al menos 51. Por lo que hemos demostrado lo que pedía el problema.