

**Taller de Talento Matemático
Bachillerato**

EL PROBLEMA DE JOSEFO

Antonio M. Oller Marcén

oller@unizar.es

Departamento de Matemáticas - IUMA

Zaragoza, 24 de enero de 2024

Tito Flavio Josefo (siglo I)

Yossef bar Mattityahu

Historiador.

Capturado durante la revuelta judía contra Roma.

Se salvó haciéndole la pelota a Vespasiano.

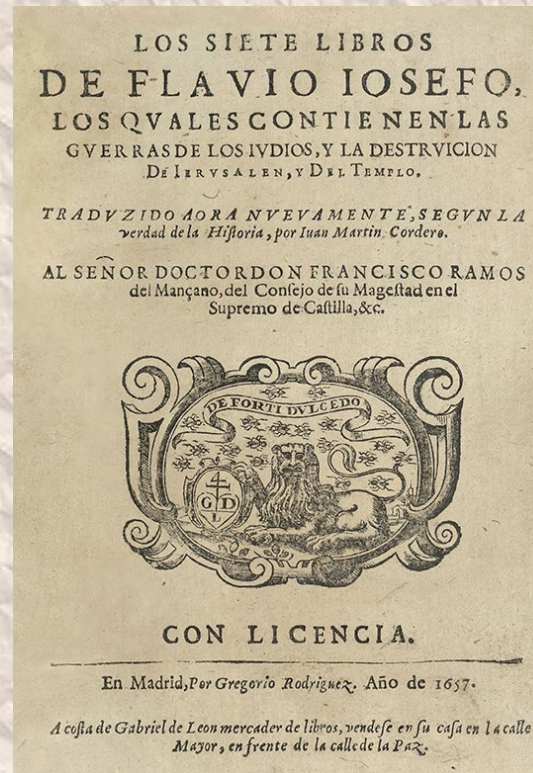
Se conservan 4 libros suyos, en griego.



EL PROBLEMA DE JOSEFO

Guerra de los judíos

Libro 3, capítulo 8, parte 7



peligro. Pues estays (dixo) deter-
 minados de mataros, acabemos ya,
 echemos suertes, quien matará a
 quien, y a quella quien cayere, que
 muera por el q̄ le sigue, y pasará de
 esta manera por todos la misma
 sentencia, porque no conuiene, q̄
 vno se mate à sí mismo: y sería cosa
 muy injusta, q̄ muertos todos los
 otros, quede alguno en vida pesan-
 dole de matarle. Parecióles q̄ dezía
 verdad, y pasieronlo por obra: segū
 la suerte à cada vno caia, así reci-
 bia la muerte del otro que le suce-
 dia, como que en fin auia luego de
 morir tambien con ellos su Capitan.
 Porq̄ parecióles mas dulce co-
 sa morir con su Capitan Iosefo, que
 viuir. Vino a quedar él, y vñ otro,
 no se si por fortuna, ó por diuina
 prouidencia, y proueyendo que no

EL PROBLEMA DE JOSEFO

Guerra de los judíos

Libro 3, capítulo 8, parte 7

Josefo y sus 40 compañeros están acorralados.

No quieren entregarse vivos.

Pactan un método para matarse entre ellos y que el último superviviente se suicide.

Se sientan en círculo y empezando por uno de ellos, cada uno mata al de su izquierda.

EL PROBLEMA DE JOSEFO

Guerra de los judíos

Libro 3, capítulo 8, parte 7

Josefo se quiere salvar.

Como igual sabía algo matemáticas, pensó un rato y descubrió dónde se tenía que sentar para ser el último superviviente. Así, en vez de suicidarse, se rinde y nadie se entera.

Pregunta: ¿Dónde se sentó?

Si en vez de ser 41, hubieran sido 4, ¿dónde se habría tenido que sentar?

¿Y si hubieran sido 6?

Vamos a completar esta tabla:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$	1	1	3	1				

Si en vez de ser 41, hubieran sido 4, ¿dónde se habría tenido que sentar?

¿Y si hubieran sido 6?

Vamos a completar esta tabla:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1

¿Para qué valores de n se cumple que $S(n) = 1$?

En la tabla hemos visto que:

$$n = 1, 2, 4, 8$$

¿Qué tienen en común estos números?

¿Para qué valores de n se cumple que $S(n) = 1$?

En la tabla hemos visto que:

$$n = 1, 2, 4, 8$$

¿Qué tienen en común estos números?

¡Son potencias de 2!

Conjetura:

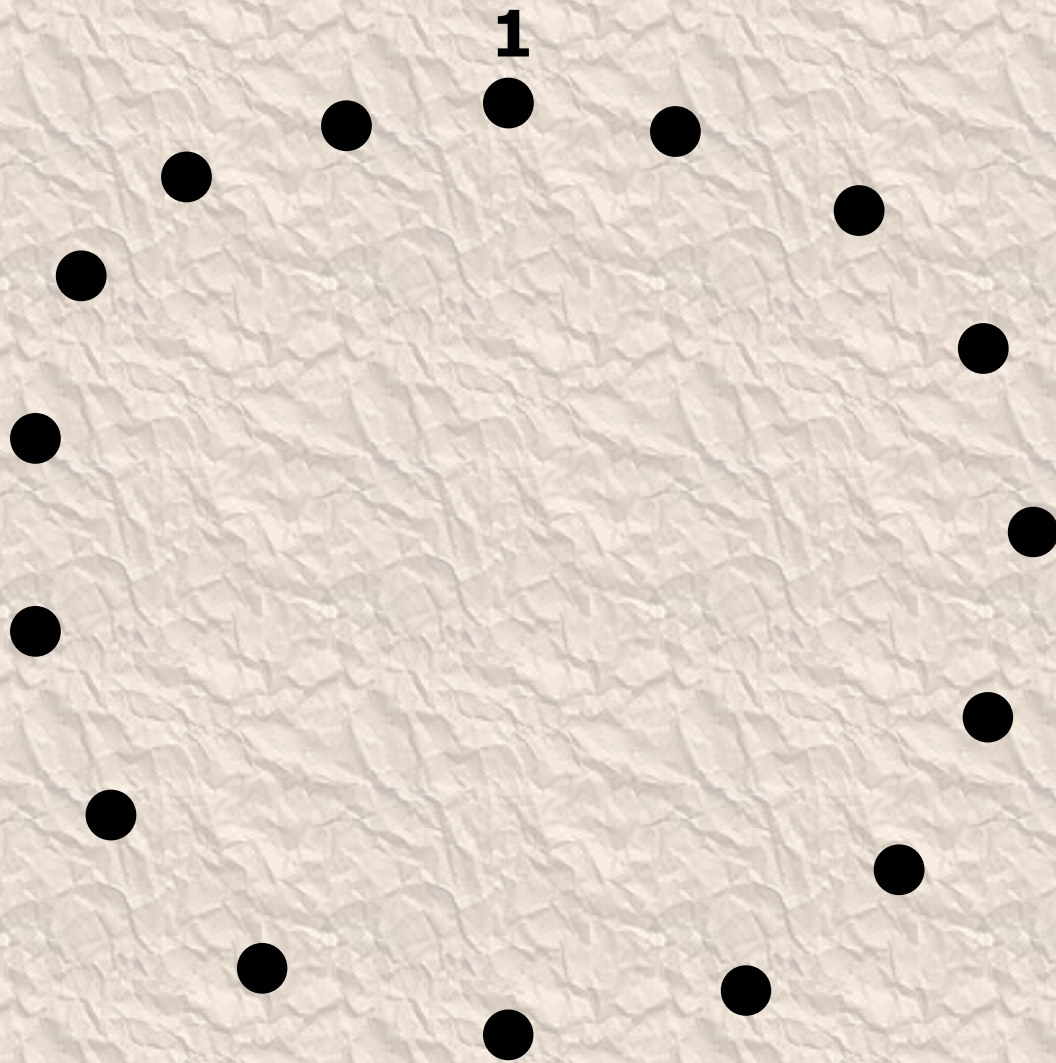
Si n es una potencia de 2, entonces $S(n) = 1$.

¿Es cierta?

¿Seguro?

¿Cómo podemos demostrarlo?

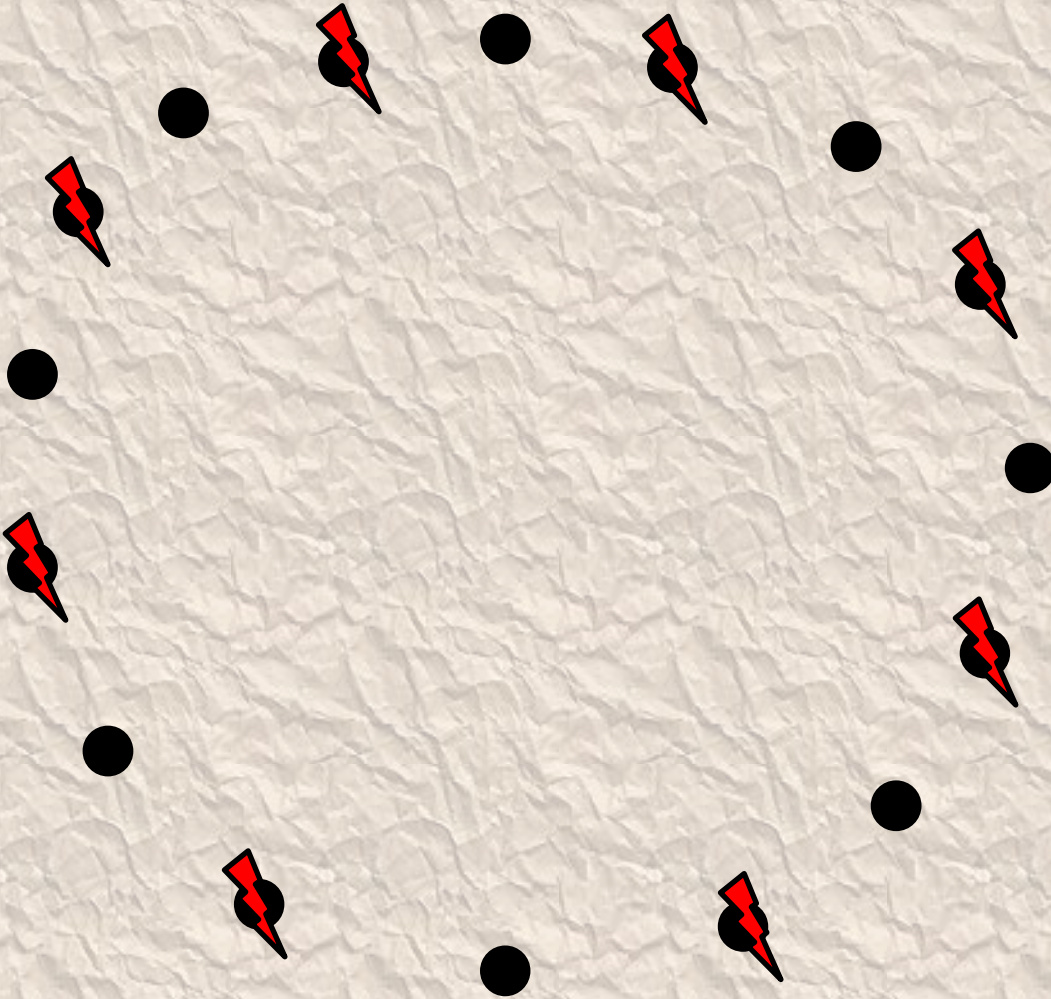
n = 16



n = 16

n = 8

1

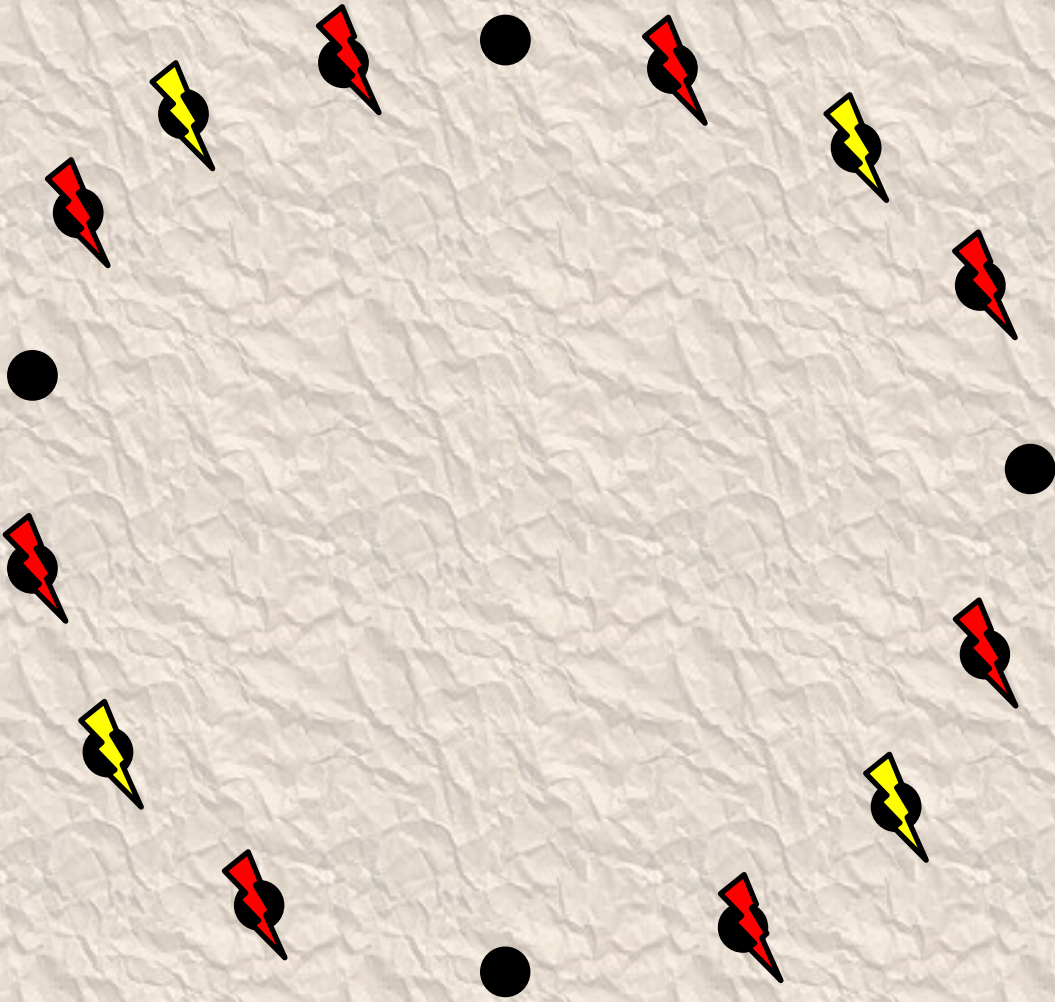


n = 16

n = 8

n = 4

1



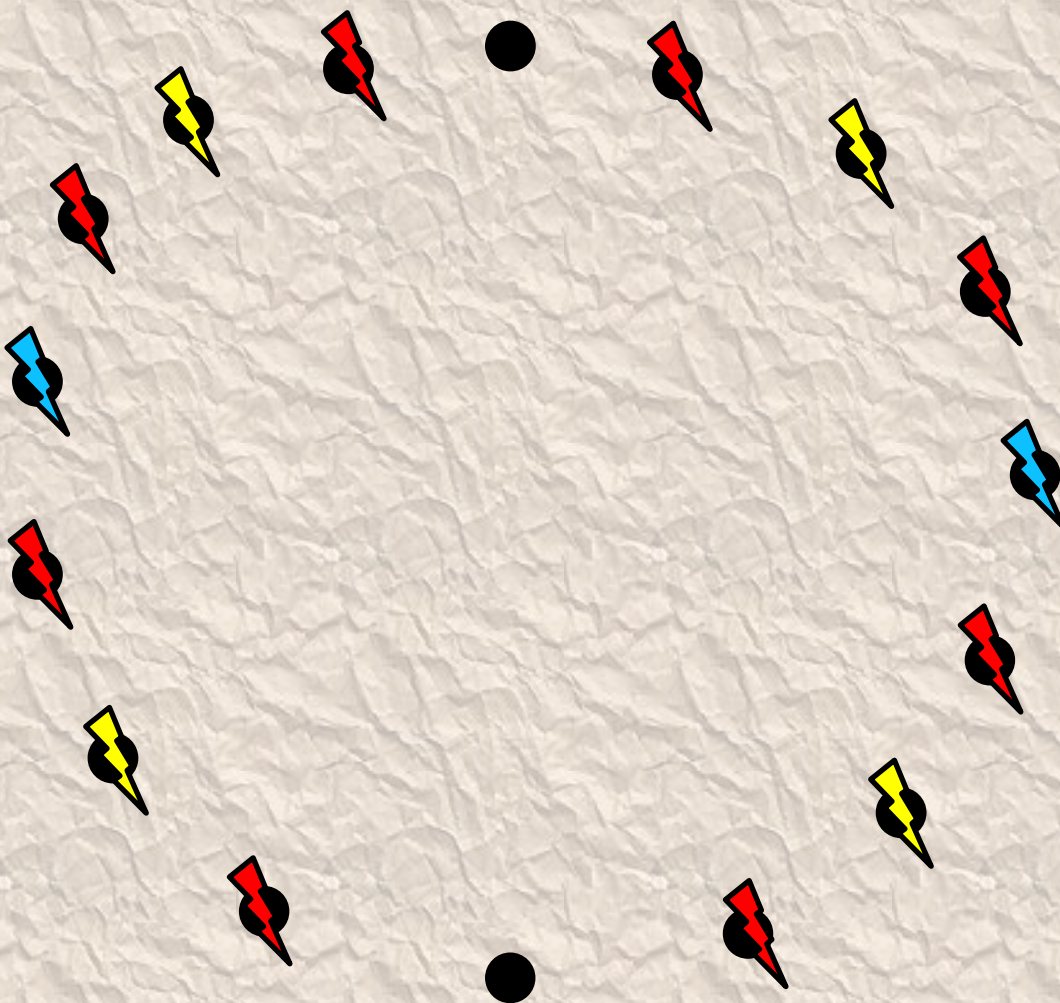
n = 16

n = 8

n = 4

n = 2

1



n = 16

n = 8

n = 4

n = 2

n = 1

1



n = 16

n = 8

n = 4

n = 2

n = 1

1

$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1$$



Una curiosidad:

$$**1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1**$$

¿Pasa lo mismo con el 3?

¿el 4?

etc...

Ya hemos visto que si el número de personas es una potencia de 2, para salvarse hay que sentarse el primero.

¿Qué pasa si no es una potencia de 2? Por ejemplo, ¿qué pasa si $n = 23$?

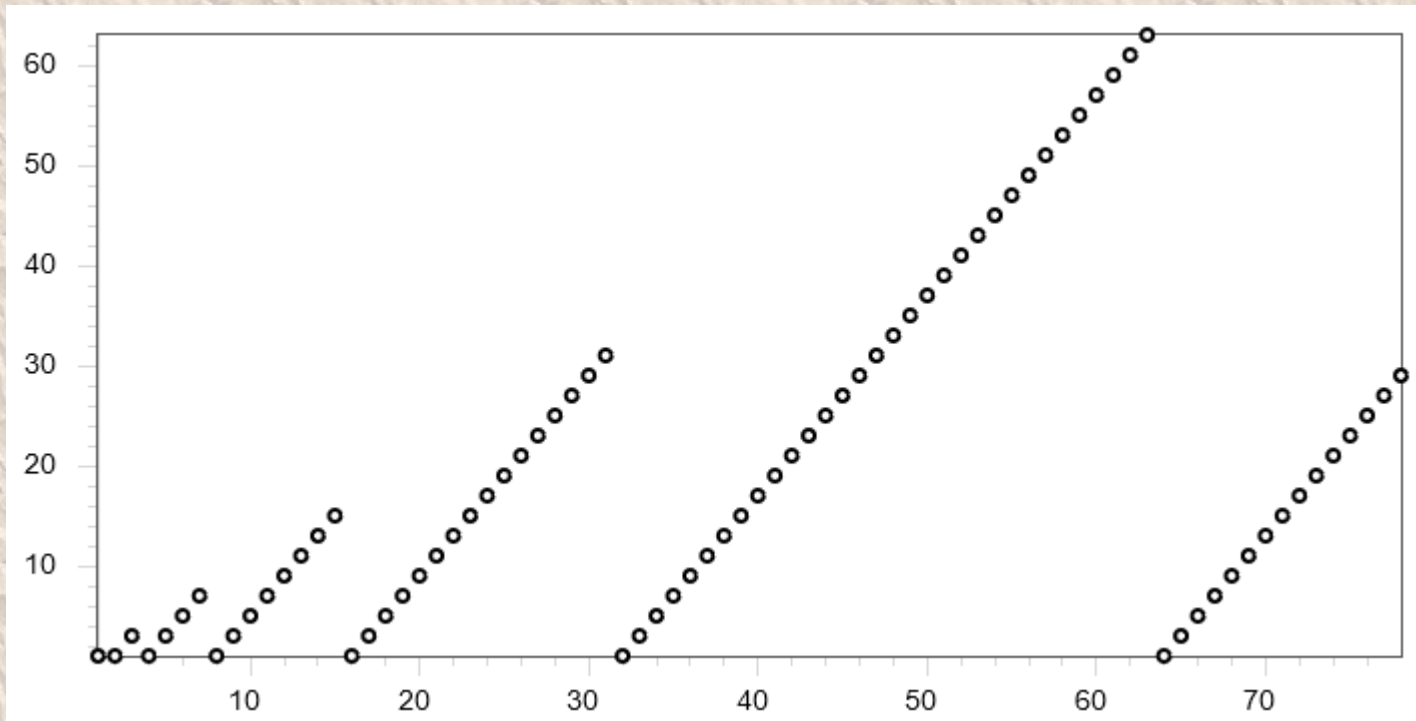
Recordar la tabla del principio:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1

16 < 23 < 32

$$16 < 23 < 32$$

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



$$16 < 23 < 32$$

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



Si hay 23 personas, tenemos que sentarnos en la posición 15

$$16 < 23 < 32$$

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



Si hay 23 personas, tenemos que sentarnos en la posición 15

¿De dónde sale ese 15?

$$16 < 23 < 32$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



Si hay 23 personas, tenemos que sentarnos en la posición 15

¿De dónde sale ese 15?

$$\begin{aligned} 23 &= 16 + 7 \\ 15 &= 2 \times 7 + 1 \end{aligned}$$

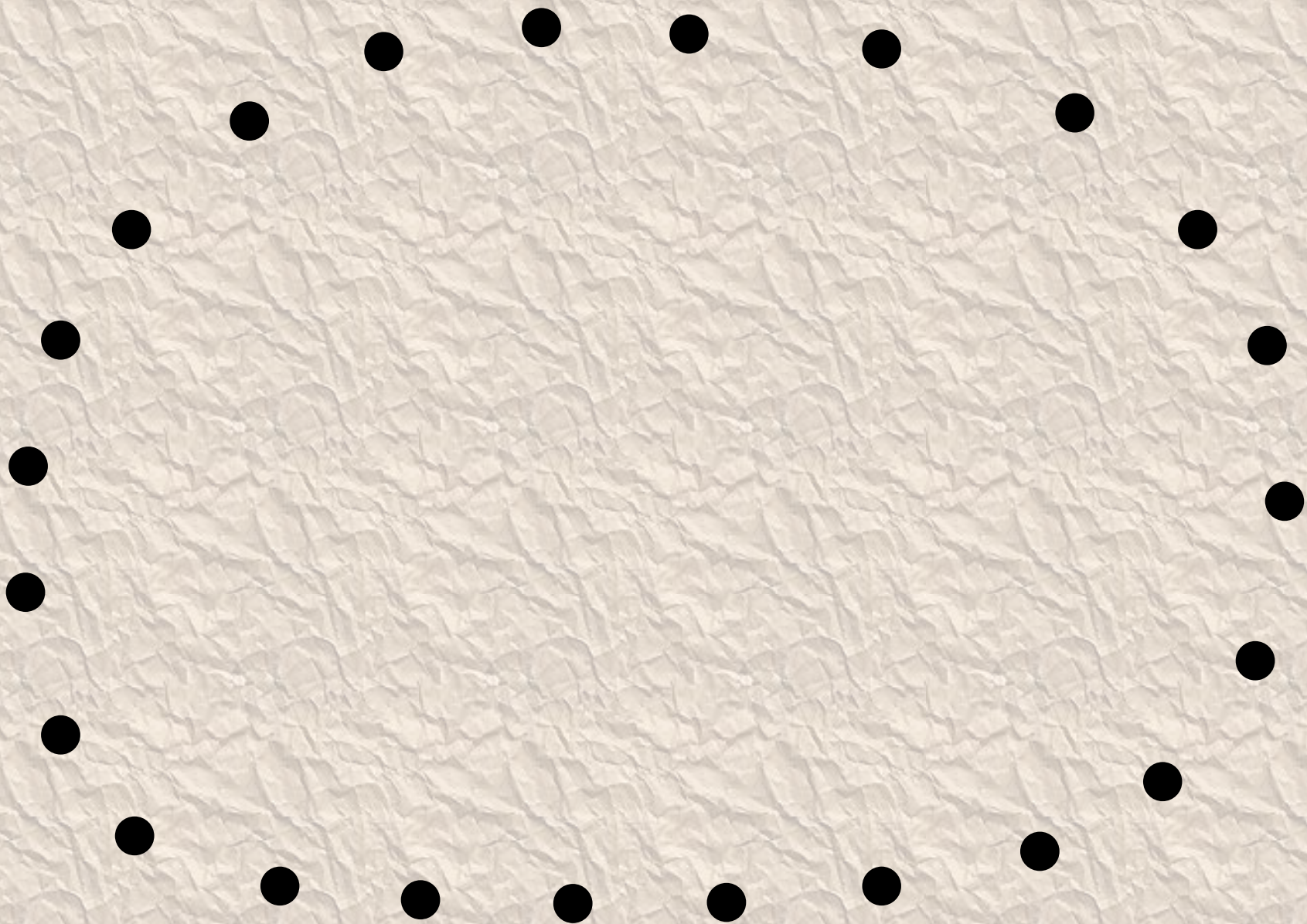
Conjetura 2:

Si $n = 2^k + a$, entonces $S(n) = 2a + 1$.

¿Cómo podemos demostrarlo?

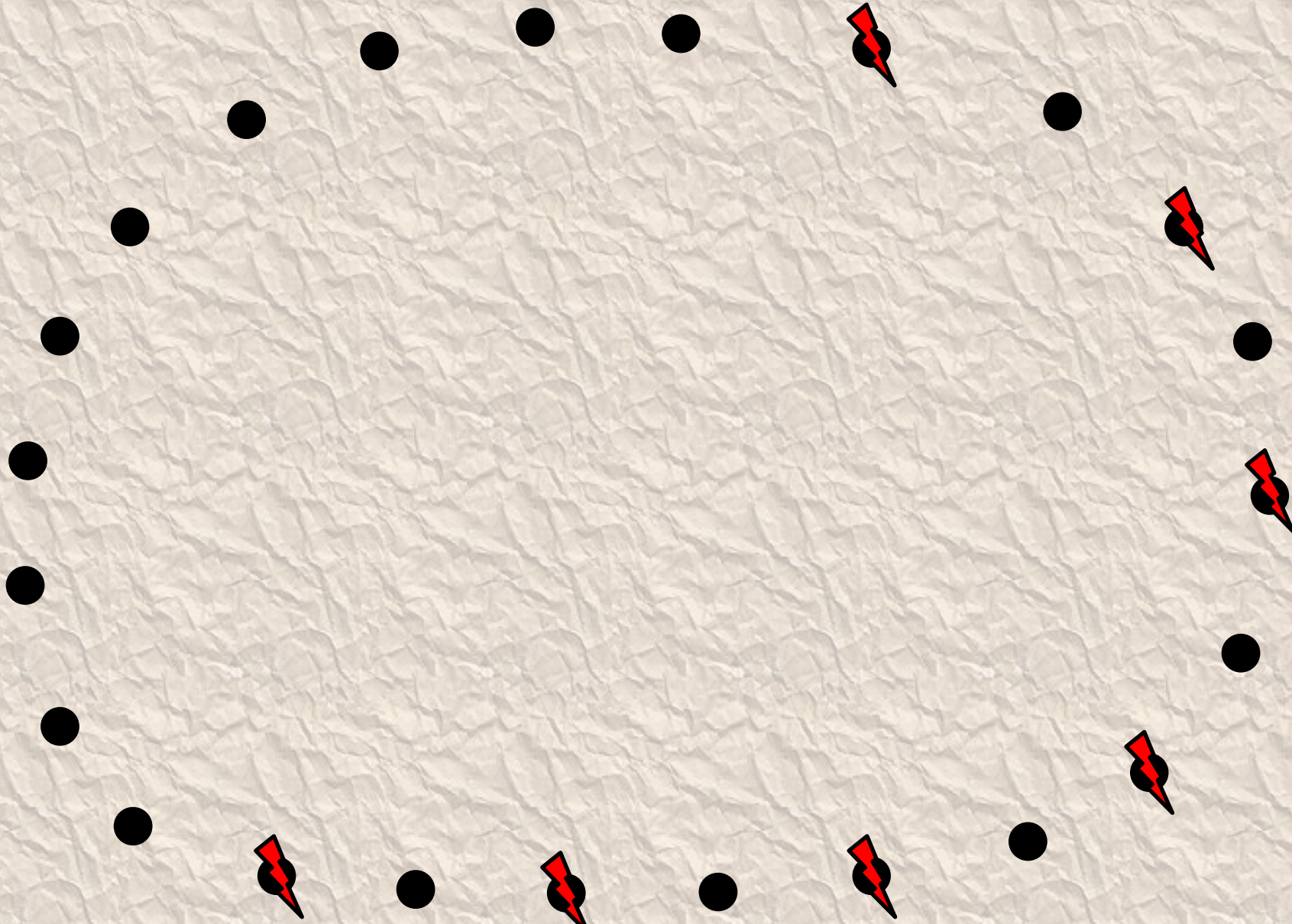
n = 23

1



n = 23 = 16 + 7

1



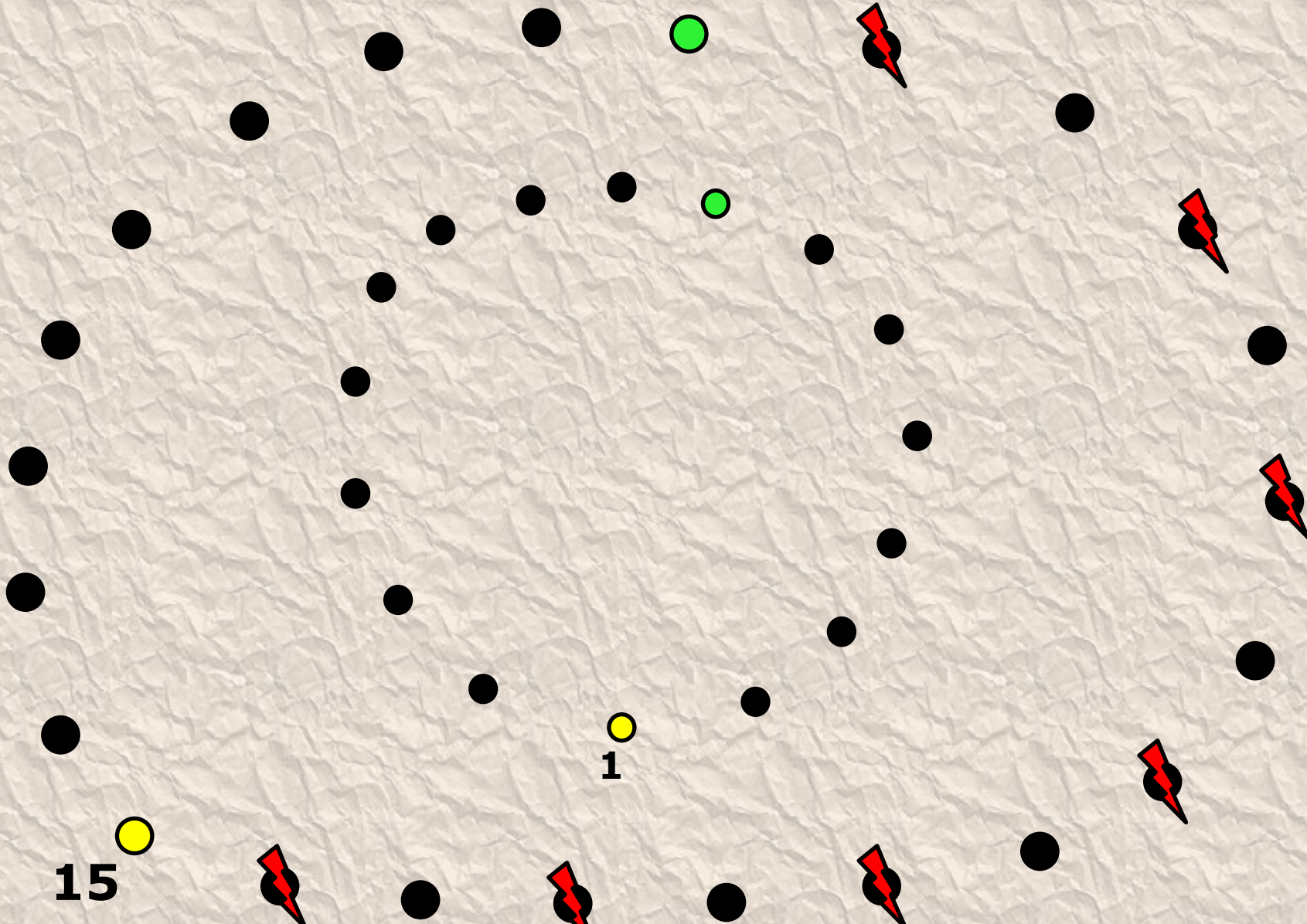
$$n = 23 = 16 + 7$$

$$2 \times 7 + 1 = 15$$

1

1

15



Teorema:

Si $n = 2^k + a$, entonces $S(n) = 2a + 1$.

¿Podemos dar una “fórmula” para $S(n)$?

Teorema:

Si $n = 2^k + a$, entonces $S(n) = 2a + 1$.

¿Podemos dar una “fórmula” para $S(n)$?

Recursivamente:

$$S(2m) = 2S(m) - 1$$

$$S(2m + 1) = 2S(m) + 1$$

Teorema:

Si $n = 2^k + a$, entonces $S(n) = 2a + 1$.

¿Podemos dar una “fórmula” para $S(n)$?

Fórmula cerrada:

$$S(n) = 2(n - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}) + 1$$

En el problema original $n = 41$.

$$\mathbf{S(41) = 2S(20)+1=2(2S(10)-1)+1=...}$$

Como $41 = 32 + 9$,

$$\mathbf{\log_2(40) = 5,357...}$$

$$\mathbf{S(41) = 19}$$

Por tanto, Josefo se sentó en la posición número 19, quedó el último, se entregó y se salvó.

Generalizando:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

Generalizando:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugares en los que sentarse \rightarrow	1	1, 2						

¿Cómo generalizamos el problema? ¿Admitimos suicidios?

Generalizando:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugares en los que sentarse \rightarrow	1	1, 2	1, 2	1, 4	2, 4	1, 5	1, 4	4, 7

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugares en los que sentarse \rightarrow	1	2	2	1	4	1	4	7

Generalizando:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugares en los que sentarse $\rightarrow T(n)$	1	2	2	1	4	1	4	7

0 1 3 6 2 7
 : 13
 : OE
 23 IS 20
 10 22 11 21

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
 OF INTEGER SEQUENCES[®]

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

1,2,2,1,4,1,4,7

Buscar [Sugerencias](#)

(Saludos de [La Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros!](#))

Buscar: seq:1,2,2,1,4,1,4,7

Displaying 1-1 of 1 result found.

page 1

Sort: relevance | [references](#) | [number](#) | [modified](#) | [created](#) Format: long | [short](#) | [data](#)

[A054995](#)

A version of Josephus problem: $a(n)$ is the surviving integer under the following elimination process. Arrange $1, 2, 3, \dots, n$ in a circle, increasing clockwise. Starting with $i=1$, delete the integer two places clockwise from i . Repeat, counting two places from the next undeleted integer, until only one integer remains.

⁺³⁰
19

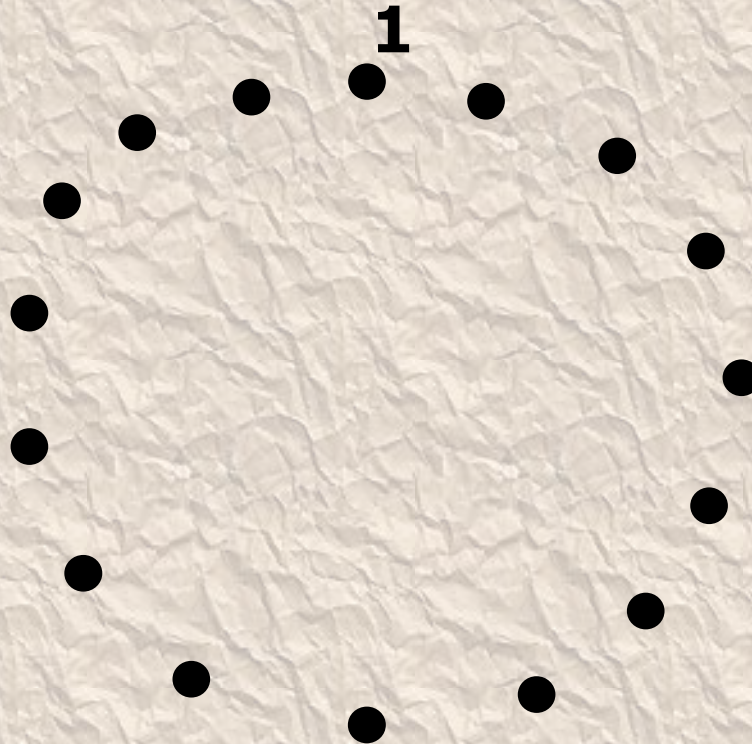
1, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 10, 13, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 ([list](#); [graph](#); [refs](#); [listen](#); [history](#); [text](#); [internal format](#))

<https://oeis.org/>

Generalizando (un ejemplo):

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

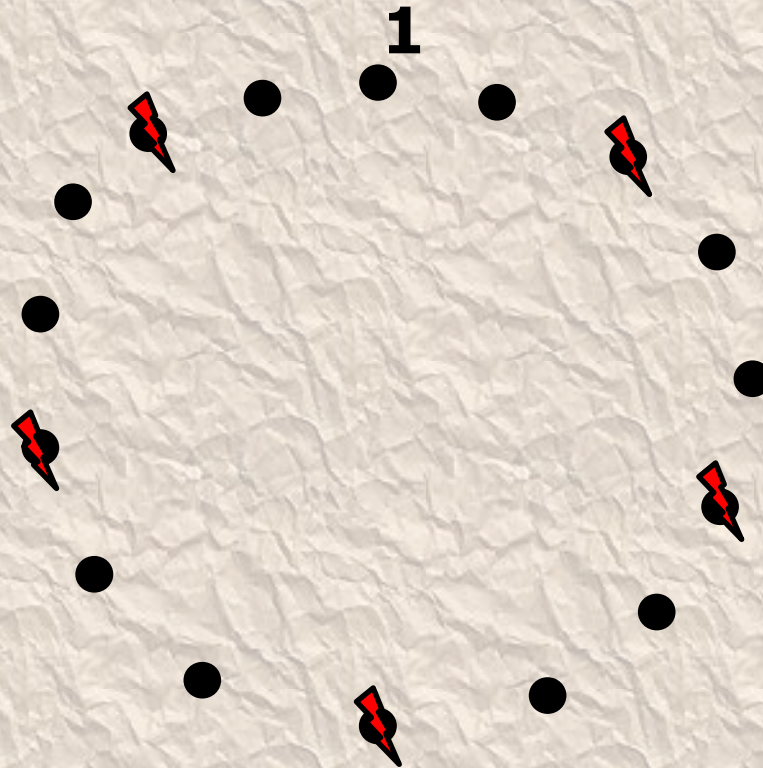
$n = 16$



Generalizando (un ejemplo):

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

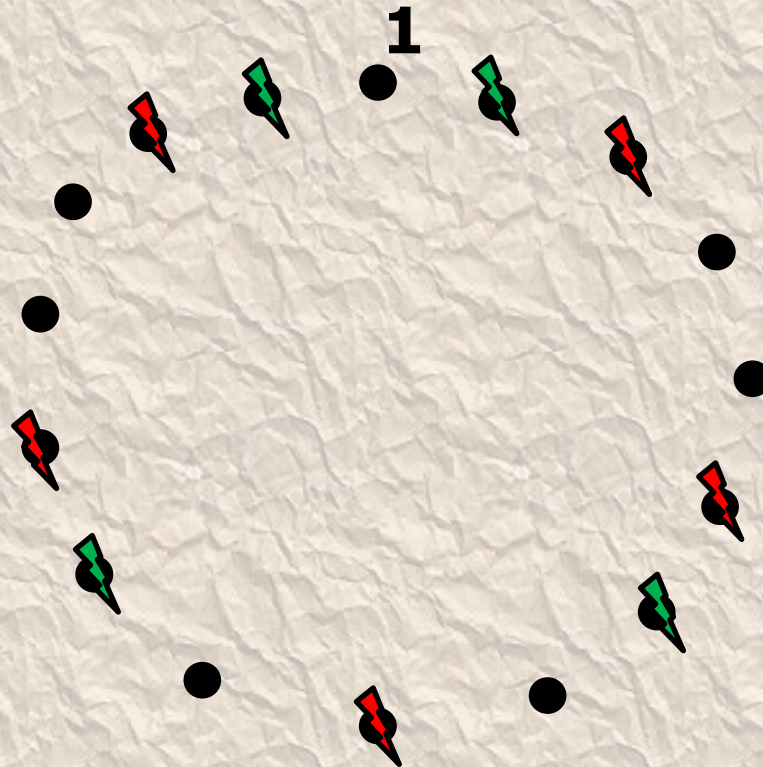
$n = 16$



Generalizando (un ejemplo):

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

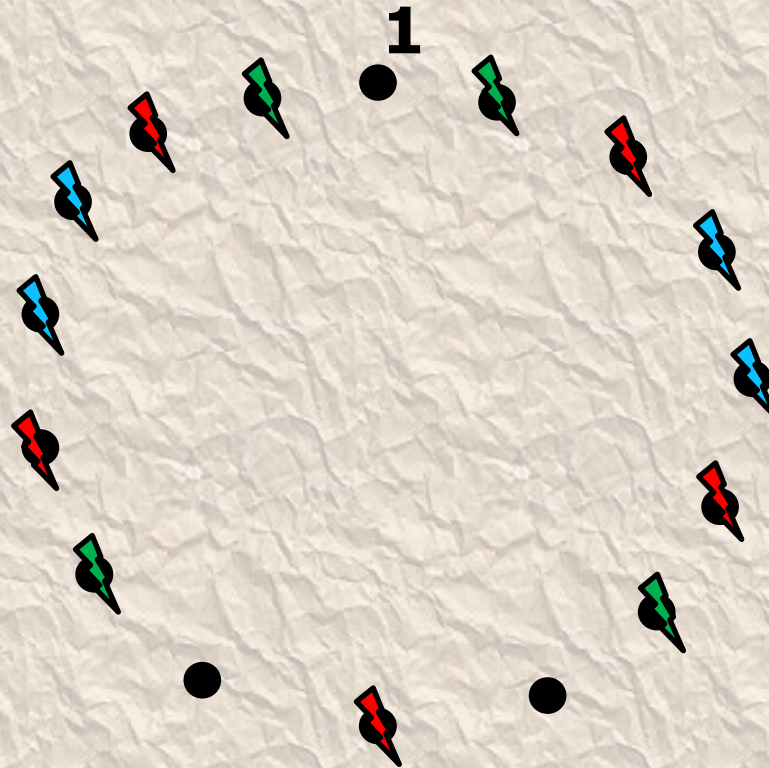
$n = 16$



Generalizando (un ejemplo):

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

$n = 16$



Generalizando (un ejemplo):

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

$n = 16$



Generalizando (un ejemplo):

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

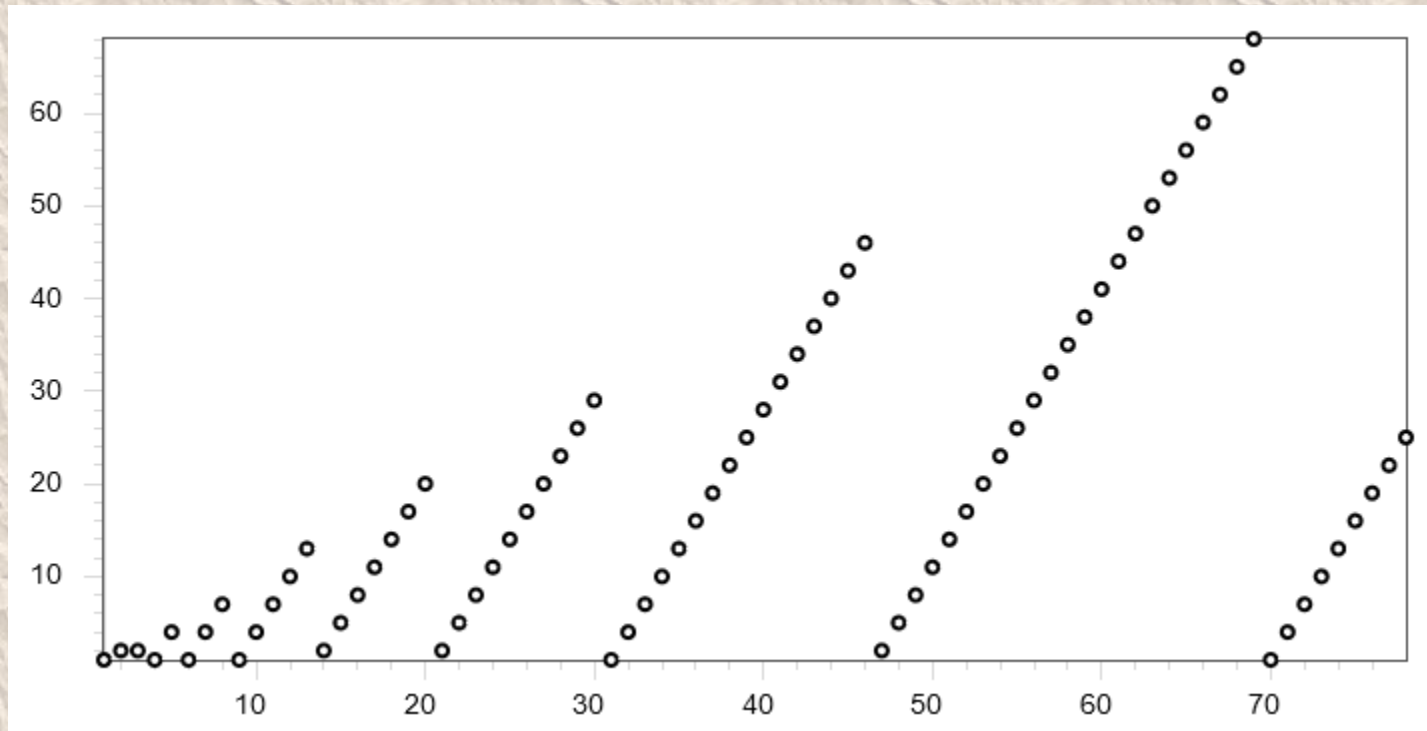
$n = 16$

$T(16) = 8$



Generalizando:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?



Generalizando:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

¿Cuánto vale $T(n)$?

¿Cómo calcular $T(n)$?

$$T(n) = T(n - 1) + 3 \pmod{n}$$

Y más allá:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

¿Y si matamos al tercero de nuestra izquierda?

¿Y al cuarto?

etc., etc., etc.



**Taller de Talento Matemático
Bachillerato**

¡MUCHAS GRACIAS!

Antonio M. Oller Marcén

oller@unizar.es

**Departamento de Matemáticas -
IUMA**

Zaragoza, 24 de mayo de 2024