lunes, 11 de julio de 2022

Problema 1. El Banco de Oslo emite dos tipos de monedas: de aluminio (denotadas por A) y de bronce (denotadas por B). Mariana tiene n monedas de aluminio y n monedas de bronce, colocadas en fila en un orden inicialmente arbitrario. Una *cadena* es una sucesión de monedas consecutivas todas del mismo tipo. Dado un entero positivo $k \leqslant 2n$, Mariana realiza repetidamente la siguiente operación: primero identifica la cadena más larga que contiene la k-ésima moneda desde la izquierda y después reubica todas las monedas de esa cadena al extremo izquierdo de la fila. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 4$, el proceso que comienza con el orden inicial $AABBBABA$ será

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Hallar todas las parejas (n, k) con $1 \leqslant k \leqslant 2n$ tales que, cualquiera que sea el orden inicial, en algún momento durante el proceso las n monedas de la izquierda serán todas del mismo tipo.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe exactamente un $y \in \mathbb{R}^+$ que satisface

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problema 3. Sea k un entero positivo y sea S un conjunto finito de números primos impares. Demostrar que existe a lo sumo una manera (sin contar rotaciones y reflexiones) de colocar los elementos de S alrededor de una circunferencia de modo que cada producto de dos números que son vecinos sea de la forma $x^2 + x + k$ para algún entero positivo x.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

martes, 12 de julio de 2022

Problema 4. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $BC = DE$. Supongamos que existe un punto T en el interior de $ABCDE$ tal que $TB = TD$, $TC = TE$ y $\angle ABT = \angle TEA$. La recta AB corta a las rectas CD y CT en los puntos P y Q, respectivamente. Supongamos que los puntos P, B, A, Q aparecen sobre su recta en ese orden. La recta AE corta a las rectas CD y DT en los puntos R y S, respectivamente. Supongamos que los puntos R, E, A, S aparecen sobre su recta en ese orden. Demostrar que los puntos P, S, Q, R están en una misma circunferencia.

Problema 5. Hallar todas las ternas (a, b, p) de números enteros positivos con p primo que satisfacen

$$a^p = b! + p.$$

Problema 6. Sea n un número entero positivo. Un *cuadrado nórdico* es un tablero $n \times n$ que contiene todos los números enteros del 1 al n^2 de modo que cada celda contiene exactamente un número. Dos celdas diferentes son adyacentes si comparten un mismo lado. Una celda que solamente es adyacente a celdas que contienen números mayores se llama un *valle*. Un *camino ascendente* es una sucesión de una o más celdas tales que:

(i) la primera celda de las sucesión es un valle,

(ii) cada celda subsiguiente de la sucesión es adyacente a la celda anterior, y

(iii) los números escritos en las celdas de la sucesión están en orden creciente.

Hallar, como función de n, el menor número total de caminos ascendentes en un cuadrado nórdico.

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.