

DIFERENCIAS DE CUADRADOS

Taller de Talento Matemático – 20/05/2022

Antonio M. Oller Marcén
oller@unizar.es



PROBLEMA GENERAL: DESCOMPONER UN ENTERO COMO SUMA O DIFERENCIA DE ENTEROS DE UN TIPO “ESPECIAL”.



PROBLEMA GENERAL: DESCOMPONER UN ENTERO COMO SUMA O DIFERENCIA DE ENTEROS DE UN TIPO “ESPECIAL”.

Ejemplo 1: ¿Qué números se pueden descomponer como la suma de dos primos?

Ejemplo 2: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos primos?

Ejemplo 1: ¿Qué números se pueden descomponer como la suma de dos primos?

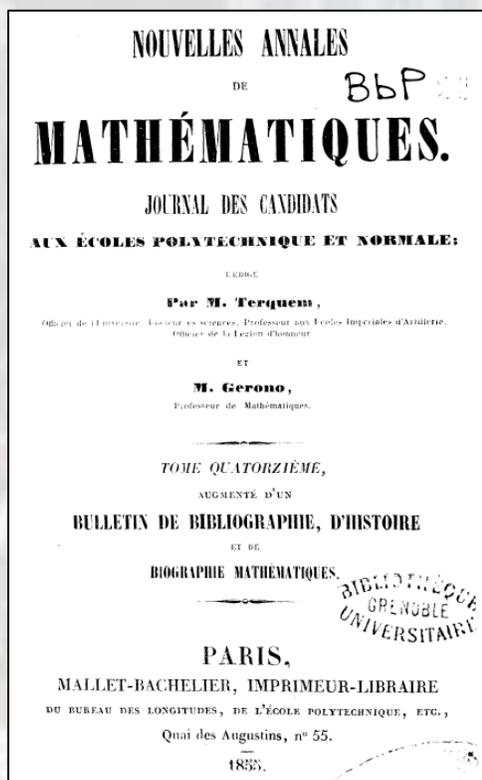
- ¿Qué números impares son suma de dos primos?
- ¿Qué números pares son suma de dos primos?

Ejemplo 2: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos primos?

- ¿Qué números impares son diferencia de dos primos?
- ¿Qué números pares son diferencia de dos primos?

Ejemplo 2: ¿Qué números pares se pueden descomponer como la diferencia de dos primos?

(118)
2°. Tout nombre pair est la différence de deux nombres premiers (*). (POLIGNAC.)



Conjetura de Polignac “*débil*” (1849/1855):

“Todo número par es la diferencia de dos números primos (consecutivos) (de infinitas maneras)”.

No está resuelta aún.

La versión “fuerte” no está resuelta ni siquiera para valores concretos.



PROBLEMA GENERAL: DESCOMPONER UN ENTERO COMO SUMA O DIFERENCIA DE ENTEROS DE UN TIPO “ESPECIAL”.

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

Ejemplo 4: ¿Qué números se pueden descomponer como la suma de dos cuadrados?



PROBLEMA GENERAL: DESCOMPONER UN ENTERO COMO SUMA O DIFERENCIA DE ENTEROS DE UN TIPO “ESPECIAL”.

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

Ejemplo 4: ¿Qué números se pueden descomponer como la suma de dos cuadrados?

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Qué tiene que cumplir n para que esta ecuación (no) tenga solución?

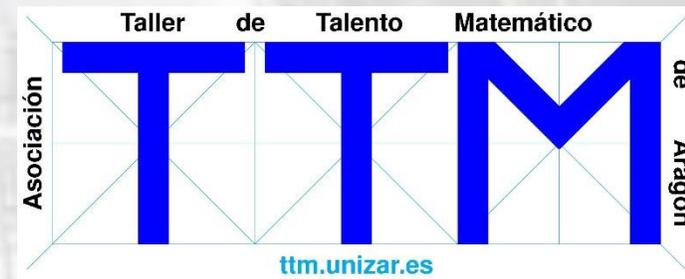
$$x^2 - y^2 = n$$

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Qué tiene que cumplir n para que esta ecuación (no) tenga solución?

$$x^2 - y^2 = n$$

Para que tenga solución, n debe ser impar o múltiplo de 4.



Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Cuántas soluciones [positivas] tiene la ecuación $x^2 - y^2 = n$?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$S(n)$	1	0	1			0				0			1

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Cuántas soluciones [positivas] tiene la ecuación $x^2 - y^2 = n$?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$S(n)$	1	0	1	1	1	0	1	1	2	0	1	1	1

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Cuántas soluciones [positivas] tiene la ecuación $x^2 - y^2 = n$?

n	Cuadrado	No cuadrado
Impar	$S(n) = \frac{\tau(n) + 1}{2}$	$S(n) = \frac{\tau(n)}{2}$
Múltiplo de 4	$S(n) = \frac{\tau(n) + 1}{2} - \iota(n)$	$S(n) = \frac{\tau(n)}{2} - \iota(n)$

$\tau(n)$: número de divisores de n .

$\iota(n)$: número de divisores impares de n .

¿Cómo se calculan $\tau(n)$ e $\iota(n)$?



Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Qué valores de n cumplen que $S(n) = 1$? ¿Y que $S(n) = 2$?

n	Cuadrado	No cuadrado
Impar	$S(n) = \frac{\tau(n) + 1}{2}$	$S(n) = \frac{\tau(n)}{2}$
Múltiplo de 4	$S(n) = \frac{\tau(n) + 1}{2} - \iota(n)$	$S(n) = \frac{\tau(n)}{2} - \iota(n)$

$\tau(n)$: número de divisores de n .

$\iota(n)$: número de divisores impares de n .

Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Qué valores de n cumplen que $S(n) = 1$? ¿Y que $S(n) = 2$?

$$S(n) = 1 \implies n = 1, 4, 8, p, 4p$$



Ejemplo 3: ¿Qué números se pueden descomponer como la diferencia de dos cuadrados?

¿Qué valores de n cumplen que $S(n) = 1$? ¿Y que $S(n) = 2$?

$$S(n) = 1 \implies n = 1, 4, 8, p, 4p$$

$$S(n) = 2 \implies n = 16, 32, 8p, p^2, 4p^2, 4p^3, pq, 4pq$$

Ejemplo 4: ¿Qué números se pueden descomponer como la suma de dos cuadrados?

¿Qué tiene que cumplir n para que esta ecuación (no) tenga solución?

$$x^2 + y^2 = n$$

Es algo más difícil de estudiar.



Ejemplo 4: ¿Qué números se pueden descomponer como la suma de dos cuadrados?

¿Qué tiene que cumplir n para que esta ecuación (no) tenga solución?

$$x^2 + y^2 = n$$

Valores de n que sí tienen solución: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 121, 122, 125, 128, 130, 136, 137, 144, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, ...



Implicación geométrica curiosa:

Cualquier entero positivo es el cateto de un triángulo rectángulo cuyos lados sean enteros.

No cualquier entero positivo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados sean enteros.

