# Preparación olímpica II
# Congruencias

Rubén Blasco García

9 Noviembre 2018

Hoy vamos a aprender una herramienta matemática que resulta muy útil en bastantes problemas que aparecen en las olimpiadas de matemáticas: las congruencias. Aunque os suene a algo novedoso y que no habéis visto antes, todos vosotros sabéis hacer congruencias lo único que todavía no lo sabéis. ¿Por qué digo esto? Porque básicamente las congruencias es una generalización de la forma de contar las horas que van pasando en un reloj.

## 1. Aritmética del reloj[1]

Todos sabemos operar con números enteros, pero en el reloj las operaciones no funcionan del modo habitual. Por ejemplo, si son las 9 y pasan 6 horas, sabemos que el reloj marcará las 3, pero $9 + 6 = 15$. Lo que ocurre es que cada vez que pasan 12 horas vuelve a empezar. Esta situación la denotaremos de la siguiente forma:

$$9 + 6 \equiv 3 \pmod{12}$$

que se lee "9 más 6 es congruente a 3 módulo 12".

Al sumar los números de esta forma decimos que estamos haciendo 'aritmética modular' o 'aritmética del reloj'.

Como en el reloj sólo hay 12 horas nos bastarán los números $0, 1, ..., 11$ para representar todas las horas. Así el 12 pasará a ser el 0, el 13 el 1... Es decir:

$$12 \equiv 0 \pmod{12}, 13 \equiv 1 \pmod{12}$$

De modo más general diremos que dos números $a, b$ son congruentes módulo 12 y lo escribiremos

$$a \equiv b \pmod{12}$$

si $a - b$ es un múltiplo de 12. En un reloj, dos números $a, b$ que sean congruentes módulo 12 representan la misma hora.

En aritmética del reloj también podemos restar, multiplicar e incluso dividir por algunos números.

Para restar 7 y 9, empezamos en el 0, adelantamos el reloj 7 horas y luego lo retrasamos 9, esto da $-2 = 10 - 12$, y el resultado es 10 ($-2 \equiv 10 \pmod{12}$). De este modo, el signo menos nos dice que debemos retrasar el reloj.

[1] Esta sección se basa en apuntes de Alberto Elduque, para más ejercicios básicos para familiarizarse con este concepto se pueden consultar en http://ttm.unizar.es/2011-12/congruencias12_I.pdf

La multiplicación ya sabemos que es una suma repetida, luego si sabemos sumar sabemos multiplicar. Pero podemos operar de otra manera, si queremos calcular $11 \times 15$ podemos hacer la multiplicación normal $11 \times 15 = 165$ y ahora dividir por 12 obteniendo cociente y resto $165 = 13 \times 12 + 9$ y como dar 13 vueltas completas al reloj no hace nada, tenemos que $11 \times 15 \equiv 3 \mod 12$.

Pero todavía se puede hacer más facilmente:

$$11 \times 15 = (-1 + 12) \times (3 + 12) = -1 \times 3 + 12 \times 3 + (-1) \times 12 + 12 \times 12$$

y como dar vueltas completas al reloj no hace nada:

$$11 \times 15 \equiv -1 \times 3 = -3 \equiv 9 \mod 12$$

La división es la operación inversa a la multiplicación. Así, si nos planteamos cuanto vale $5 : 7$ en la aritmética del reloj, lo que nos estamos planteando es encontrar un número $x$ entre 0 y 11 tal que:

$$x \times 7 \equiv 5 \mod 12$$

Como divir por 7 es lo mismo que multiplicar por el inverso de 7, nos basta con resolver:

*Ejercicio* 1.1. Resuelve la ecuación $x \times 7 \equiv 1 \mod 12$. ¿Qué otros números enteros entre 0 y 11 tienen un ïnverso módulo 12?

Lo que hemos hecho hasta ahora con un reloj normal"(congruencias módulo 12) lo podemos hacer con relojes que tengan otro número de horas. Al fin y al cabo, nuestros antepasados podrían haber decidido contar el tiempo de otra manera. Todo lo anterior tiene perfecto sentido para otros relojes y podemos definir y operar con congruencias módulo $m$ un entero cualquiera. Eso sí, a la hora de operar hay que fijarse que siempre tenemos que operar con el mismo módulo, no podemos mezclar operaciones de congruencias con módulos distintos.

*Ejercicio* 1.2. Hacer las tablas de la suma y la multiplicación módulo 6 y 7, ¿para qué números existen inversos en cada caso?

Respecto a la división se satisface la siguiente propiedad: "Si el $mcd(c, m) = 1$, entonces $ca \equiv cb \mod m \implies a \equiv b \mod m$".

Otra propiedad importante es el Pequeño teorema de Fermat:

**Teorema 1.3.** *Si $a$ es un entero positivo y $p$ un número primo:*

$$a^p \equiv a \mod p$$

*Si además $mcd(a, p) = 1$, se satisface:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

## 2. Problemas

**Problema 1.** *El número* $2^{2}9$ *tiene* 9 *dígitos distintos. Sin usar la calculadora, hallar el dígito que falta.*

**Problema 2.** *Probar que hay infinitos primos cuyo resto al dividirlos por* 3 *es* 2*. (OME Fase Local 2017)*

**Problema 3.** *Sea* $n$ *un número natural. Probar que si la última cifra de* $7^n$ *es* 3*, la penúltima es* 4*. (OME Fase Local 2018)*

**Problema 4.** *Probar que para cualquier primo* $p$ *distinto de* 2 *y* 5 *existe un múltiplo de* $p$ *cuyas cifras son todo nueves. (Por ejemplo, si* $p = 13$, $999999 = 13 \times 76923$*).*

**Problema 5.** *Probar que* 1982 *divide a* 222..,22 *(*1980 *doses).*

**Problema 6.** *Probar que* $5555^{2222} + 2222^{5555}$ *es múltiplo de* 7*.*

**Problema 7.** *Sean* $a, b, c$ *números naturales primos distintos dos a dos. Demostrar que el número*

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

*es múltiplo de abc. (OME Fase Local 2018)*