Preparación olímpica I

Rubén Blasco García

20 Octubre 2017

Problema 1. *Se tienen dos progresiones de números reales, una aritmética* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y otra geométrica* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no constante. Se cumple que* $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$ *y* $a_{10} = g_3$. *Decidir, razonadamente, si para cada entero positivo* p, *existe un entero positivo* m, *tal que* $g_p = a_m$. *(OME Fase Nacional 2016)*

Problema 2. *Se dispone de una fila de* 102 *casillas, numeradas consecutivamente del* 0 *al* 101. *Inicialmente hay una ficha colocada en la casilla* 0. *Dos jugadores* A *y* B *juegan alternativamente, empezando* A, *de la siguiente manera: en su turno cada jugador puede o bien hacer avanzar la ficha* 7 *casillas o bien hacer retroceder la ficha* 1 *casilla, sin que en ningún caso se sobrepasen las casillas* 0 *ni* 101. *Gana el juego aquel que coloque la ficha en la casilla* 101. *¿Quién de ellos dispone de una estrategia ganadora y cómo debería jugar para asegurarse ganar? (Adaptado de un problema de la Fase Nacional OME 2017)*

Problema 3. *Probar que hay infinitos primos cuyo resto al dividirlos por* 3 *es* 2. *(OME Fase Local 2017)*

Problema 4. *Sea* $n > 2$ *un entero positivo. Tenemos* $2n$ *bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que siempre que formamos* n *parejas con dos bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.*

1. *Demuestra que hay* 4 *bolas con el mismo número.*
2. *Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es como mucho* $n - 1$.

(OME Fase Local 2015)

Problema 5. *Determina el número de valores distintos de la expresión*

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n - 2}$$

donde $n \in \{1, 2, ..., 100\}$. *(OME Fase Nacional 2017)*

Problema 6. *Sean* $m \geq 1$ *un entero positivo,* a, b *enteros positivos distintos mayores estrictamente que* m^2 *y menores estrictamente que* $m^2 + m$. *Hallar todos los enteros* d *que dividen al producto* ab *y cumplen* $m^2 < d < m^2 + m$. *(OME Fase Nacional 2016)*

Problema 7. *Encontrar todas las soluciones enteras positivas de*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b+c-2} = 1$$

(OME Fase Local 2017)