TTM, preparación olímpica II, combinatoria

Adrián Rodrigo Escudero

10 de noviembre de 2017

Teoría

Ejemplo 1 (fase local Olimpiada Matemática Española 2006)**.** En el sótano de un castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Solución 1. Aplicando el principio del palomar a tres enanos cualesquiera ($144 = 3 \cdot 48 + 0$), vemos que uno de los tres enanos tiene 48 llaves o más, y lo apartamos. Con los otros seis enanos formamos dos grupos de tres; cada grupo tiene al menos 144 llaves, luego entre los seis tienen al menos 288. Por tanto entre todos tienen como mínimo $288 + 48 = 336$ llaves. □

Solución 2. Nos fijamos en una llave cualquiera, al menos 5 gnomos deben tener esa llave, ya que si no habría al menos 3 gnomos que no la tendrían, y esos 3 gnomos no podrían abrir todas las cerraduras. Luego si hay 144 llaves, y cada una la tienen al menos 5 gnomos, hay al menos $144 \cdot 5 = 720 > 336$ llaves. □

Ejemplo 2 (Vietnamese Mathematical Olympiad 1991)**.** Se sientan 2014 niños alrededor de una (enorme) mesa circular, y juegan al siguiente juego. Empezando por uno de ellos, y siguiendo en el sentido de las agujas del reloj, van diciendo los siguientes números:

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \ldots$$

(Por ejemplo, el décimo dirá "1".) Cuando un jugador dice "1" o "3", debe abandonar la mesa inmediatamente. Gana el último en tener que levantarse. ¿Quién será el vencedor?

Solución. Observamos que, si solamente hubiera $729 = 3^6$ niños en la mesa, al ser este número una potencia de 3, el problema sería muy fácil. En efecto, después de la primera ronda el número de chicos se dividiría entre 3 (quedarían 243 niños), y el niño situado en el "medio" (el número 365, llamémosle A) no se habría levantado:

$$365 = \frac{3^6+1}{2} = \frac{2\cdot 3^5 + 2\cdot 3^4 + \cdots + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 3 + 1}{2} = 3K+2$$

Lo importante es que en la siguiente ronda estaríamos en la misma situación: de nuevo habría un número de chicos que es potencia de 3, y el niño A seguiría estando en el medio de los 243, por lo que no se levantaría:

$$\frac{3^5+1}{2} = \frac{2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^3 + \cdots + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3 + 3 + 1}{2} = 3K+2$$

Después de seis rondas solo quedaría el niño A.

Si en vez irse los que dicen "1" o "3", se eliminan los que dicen "2" o "3", entonces en el caso anterior (potencia de 3), el niño que permanecería sentado y en la misma posición tras cada ronda sería el primero, y sería este quien ganara. Análogamente, si se fueran los números "1" o "2", sería el último el vencedor.

En nuestro problema no tenemos 729 niños, sino 2014. En la primera ronda, el chico número 1927 dirá "1" (ya que $1927 = 642 \cdot 3 + 1$), por lo que será eliminado; previamente se habían ido otros $1926 \cdot 2/3 = 1284$ niños. Así, antes de que hable el número 1928, quedan $2014 - 1285 = 729$ chicos; como este dirá "2", estamos en el segundo de los tres casos previamente analizados, y será él el vencedor. $\square$

Ejemplo 3 (Selection Test Vietnamese IMO team 1991)**.** En una ciudad se presentan $2n$ alumnos al examen de selectividad de matemáticas. Cada estudiante es amigo de a lo sumo otros 19 chicos (la amistad es recíproca). El profesor coordinador dispone de 5 aulas para repartir a los alumnos. Demostrar que existe una distribución en la que en cada aula hay a lo sumo $3n$ parejas de amigos (un mismo estudiante puede aparecer en varias parejas).

Solución. De entre todas las distribuciones posibles, escogemos una en la que la suma del número de parejas de amigos de las 5 aulas sea mínima. Esta idea se conoce como *principio extremal.* Notamos que cada alumno tiene a lo sumo 3 amigos en su misma aula, ya que si tuviera 4 o más, por el principio del palomar habría otra aula donde tendría 3 o menos amigos, y podríamos cambiarlo de aula contradiciendo que nuestra distribución sea la mínima. En cada aula hay como mucho $2n$ chicos, cada uno formando parte de como mucho 3 parejas, por lo que no hay más de $2n \cdot 3/2 = 3n$ parejas (dividimos entre 2 porque hemos contado cada pareja dos veces). $\square$

Problemas

Problema 1 (Arthur Engel, Problem-Solving Strategies)**.** A una sesión del TTM acudieron 17 estudiantes. Cada uno de ellos habló con los otros 16. Hablaron de tres temas distintos: álgebra, aritmética y geometría. Cada pareja habló solamente de un tema. Demuestra que hay tres estudiantes que hablaron de un único tema entre ellos.

Problema 2 (Allunion Mathematical Olympiad 1977)**.** 7 mineros enanos se sientan alrededor de una mesa circular para repartir las ganancias de su última excavación. Entre todos han conseguido $2,1$ kg de oro. Comienza uno de ellos repartiendo todo lo que tiene entre los otros 6, a partes iguales. A continuación, el que estaba sentado a su izquierda realiza la misma operación (con el oro que tiene en ese momento); y así sucesivamente hasta que todos han repartido sus posesiones una vez. Al acabar se da la casualidad de que cada enano tiene el mismo oro que al principio. ¿Cuántos kg de oro tiene cada minero?

Problema 3 (Arthur Engel, Problem-Solving Strategies)**.** Dibujamos $2n$ puntos en el plano. Después trazamos m segmentos cuyos extremos caen entre los $2n$ puntos. Sucede que no hemos dibujado ningún triángulo. Probar que $m \leq n^2$.

Problema 4 (Vietnamese Mathematical Olympiad 1992)**.** Colocamos $1991 \cdot 1992 = 3\,966\,072$ botones blancos formando un rectángulo de 1991 columnas por 1992 filas. Los botones de coordenadas $(1000, 1000)$, $(1001, 1001)$ y $(1002, 1001)$ en lugar de ser blancos son negros. Nuestro objetivo es pintar de negro el resto de botones, pero de la siguiente manera: en cada turno podemos pintar tres botones blancos consecutivos de la misma columna, o tres botones blancos consecutivos de la misma fila. ¿Es posible pintar todos los botones de esta forma?

Problema 5 (revista Tzaloa Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2009)**.** Considera 50 puntos en el plano tales que no hay tres colineales. Cada uno de estos puntos se pinta usando uno de cuatro colores disponibles. Demuestra que hay al menos 130 triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color.

Soluciones

Solución del problema 1. Fijamos un estudiante al azar; por el principio del palomar ($16 = 5 \cdot 3 + 1$) hay un tema, digamos el álgebra, del que habló con otros 6 alumnos. Si entre esos 6 estudiantes 2 hubieran hablado de álgebra ya habríamos terminado, así que supondremos que solo hablaron de aritmética y geometría.

Nos fijamos en uno de estos 6 alumnos; por el principio del palomar ($5 = 2 \cdot 2 + 1$) hay un tema, digamos la aritmética, del que habló con otros 3. Y ahora hay dos opciones, o bien estos 3 estudiantes solo hablaron de geometría, y forman el trío buscado; o bien dos de ellos hablaron entre sí de aritmética, y junto con el que habíamos fijado forman el trío buscado. $\square$

Solución del problema 2. Sea $o(e,t)$ los kg de oro que tiene el enano e después de que t enanos hayan repartido su oro. La variable t toma los valores $0, 1, 2, \ldots, 7$; pero admitimos valores mayores, imaginando que los enanos siguen repartiendo sus ganancias. Como $o(e,0) = o(e,7)$ para todo e, también $o(e,1) = o(e,8)$, y en general $o(e,t) = o(e,t+7)$. Análogamente la variable e toma valores en todos los enteros, suponiendo que el enano número e es el mismo que el número $e+7$.

Sean E, T tales que $o(E,T)$ es el máximo valor que alcanza $o(e,t)$. Como:

$$0 = o(e,e) \leq o(e,e+1) \leq \cdots \leq o(e,7) = o(e,0) \leq \cdots \leq o(e,e-1)$$

Ha de ser $T = E - 1$. Además:

$$o(E,E-1) = \frac{o(E+1,E) + o(E+2,E+1) + \cdots + o(E+6,E+5)}{6}$$

Y como $o(E,E-1)$ es máximo, debe ser $o(E,E-1) = o(E+1,E) = \cdots = o(E+6,E+5)$. Es decir, $o(1,0) = o(2,1) = \cdots = o(7,6)$.

Llamando x a la sexta parte de esta cantidad (que es lo que se reparte en cada turno), tenemos que: $o(1,0) = 6x$, $o(2,0) = 5x$, $\ldots$, $o(7,0) = 0x$. Sumando todos obtenemos $21x = 2,1$ kg; luego $x = 0,1$ kg. Y el primer enano tenía $0,6$ kg, el segundo $0,5$ kg, el tercero $0,4$ kg, etc. $\square$

Solución del problema 3. Lo demostraremos por inducción sobre n. Para 2 puntos es evidente. Supongamos que es cierto para $2n$ puntos y veamos que también se cumple para $2n+2$.

Fijamos un segmento y sus dos extremos, que llamamos A y B. Si consideramos los restantes $2n$ puntos y contamos los segmentos tales que ninguno de sus extremos es A o B, la hipótesis de inducción nos dice que hay como mucho n^2 segmentos. Además, si existe el segmento AP (con P distinto de

B), entonces no puede existir el segmento BP; luego hay como mucho $2n$ segmentos de la forma AP o BP. Finalmente tenemos que contar el propio segmento AB. Luego en total tenemos como mucho $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ segmentos. $\square$

Solución del problema 4. La respuesta es no, vamos a ver por qué. Escribimos en cada botón (x, y) el número 0, 1 o 2 según cuál sea el resto de dividir $x + y$ entre 3. Así, a los botones $(1000, 1000)$, $(1001, 1001)$ y $(1002, 1001)$ les asignamos 2, 1 y 2 respectivamente. Como 1992 es múltiplo de 3, hemos escrito en cada columna el mismo número de ceros que de unos que de doses (ya que las coordenadas de la columna número i van desde $(1, i)$ hasta $(1992, i)$); y por tanto en el rectángulo hay la misma cantidad de cada uno de ellos. Ahora bien, nuestro método nos obliga a pintar en cada turno un botón de cada número, pero ya hay dos doses pintados, un uno y ningún cero, así que es imposible. $\square$

Solución del problema 5. Ya que $50 = 4 \cdot 12 + 2$, entonces por el principio de las casillas hay al menos 13 puntos pintados del mismo color. Usando estos 13 puntos, se pueden construir $\binom{13}{3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = 286$ triángulos distintos, ya que no hay tres puntos que sean colineales. Además, tenemos $\binom{13}{2} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = 78$ segmentos de recta que son lados de los 286 triángulos. Si consideramos uno de estos segmentos, digamos ℓ, hay 11 puntos más que están pintados del mismo color que los extremos del segmento ℓ. Un triángulo isósceles que tiene a ℓ como lado desigual, tiene su tercer vértice en la mediatriz de ℓ. Luego, como no hay tres puntos que sean colineales, hay a lo más dos de estos triángulos. Por lo tanto, hay a lo más $2 \cdot 78 = 156$ triángulos isósceles cuyos vértices están pintados del mismo color, y al menos $286 - 156 = 130$ triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color. $\square$