JUGANDO CON FIBONACCI

DOS TRUCOS DE MAGIA PARA EMPEZAR:

Truco nº 1

1. Pensar dos números cualesquiera (mejor que no sean muy altos, pues hay que operar con ellos).
2. Ordenarlos de menor a mayor, van a ser los dos primeros términos de una sucesión.
3. Sumar los dos números que habéis pensados y su suma será el 3º término de la sucesión.
4. Sumamos el 3º y 2º términos de la sucesión que hemos comenzado y esta será el 4º término.
5. Para obtener nuevos términos sumamos el último término obtenido con el anterior de la sucesión.
6. Repetir el proceso varias veces.
7. Por último paso dividir el último término obtenido por el inmediato anterior.

Truco nº 2

1. Se le pide a un alumno que escriba en la pizarra dos números cualesquiera (mejor que no sean muy altos, pues hay que operar con ellos).
2. Ordenarlos de menor a mayor, van a ser los dos primeros términos de una sucesión.
3. Sumar los dos números que habéis pensados y su suma será el 3º término de la sucesión.
4. Sumamos el 3º y 2º términos de la sucesión que hemos comenzado y esta será el 4º término.
5. Para obtener nuevos términos sumamos el último término obtenido con el anterior de la sucesión.
6. Repetir el proceso varias veces.
7. Pídale al alumno después que separe con un trazo dos cualesquiera de éstos.
8. A continuación se le pide que vaya calculando la suma de todos los números situados antes de la raya.

PEQUEÑA BIOGRAFÍA Y DEFINICIONES:

Leonardo de Pisa, **Leonardo Pisano** o **Leonardo Bigollo** (ca. 1170 - 1250), también llamado **Fibonacci**, (El apodo de Guglielmo (Guillermo), padre de Leonardo, era *Bonacci* (simple o bien intencionado). Leonardo recibió póstumamente el apodo de *Fibonacci* (por *filius Bonacci*, hijo de Bonacci, **algo así como el sufijo -ez en los apellidos españoles**) fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración indo-arábigo actualmente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10, o decimal) y un dígito de valor nulo: el cero; y por idear la sucesión de Fibonacci, en su libro de 1202 *Liber Abaci*, que contiene muchos problemas elementales, entre ellos el famoso de la descendencia de una pareja de conejos.

Escultura de Leonardo de Pisa, realizada en 1863 por Giovanni Paganucci Cementerio de Pisa

Leonardo de Pisa, es conocido sobre todo a causa **François Édouard Anatole Lucas** (1842 - 1891) que fue un reconocido matemático francés. Trabajó en el observatorio de París y más tarde fue profesor de matemáticas en la capital del Sena. Se le conoce sobre todo por sus trabajos sobre la sucesión de Fibonacci y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también fue el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos como el de las *Torres de Hanói*.

La secuencia númerica: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...** es conocida como sucesión de Fibonacci y los números que la componen números de Fibonacci.

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\día de Fibonacci.docx

Lucas efectuó un profundo estudio de las llamadas sucesiones generalizadas de Fibonacci *FG*, que comienzan por dos enteros positivos *cualesquiera* y a partir de ahí, cada número de la sucesión es suma de los dos precedentes., Lucas dio el nombre de sucesión de Fibonacci a la más sencilla de estas sucesiones , otra también sencilla : 1, 3, 4, 7, 11, 18..., es conocida por sucesión de Lucas (no se sabe si Fibonacci conocía esta relación de recurrencia, de hecho la primera confirmación por escrito de la misma apareció varios siglos después cuando Kepler (1571 - 1630) escribió que Fibonacci debió haberse dado cuenta de esta relación)

La sucesión de Fibonacci es una de las más intrigantes secuencias numéricas y aún hoy continua suministrando amplias oportunidades para aficionados y profesionales de las matemáticas para hacer conjeturas y expandir el horizonte matemático.

La sucesión es tan importante que una asociación de matemáticos, *The Fibonacci Association* se creó en 1963 para el estudio de esta sucesión y sus asociadas.

La asociación publica el *Fibonacci Quaterly* dedicado a artículos relativos a estas sucesiones numéricas

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\The Fibonacci Association.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Fibonacci Quarterly.doc

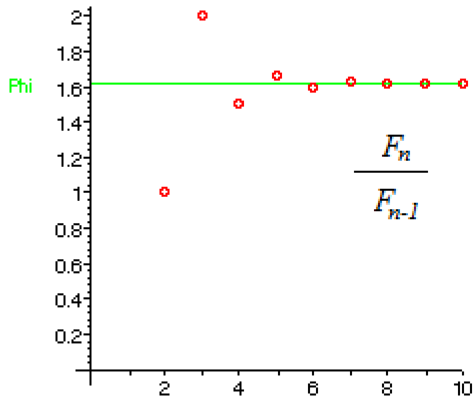
En la sucesión de Fibonacci también puede pensarse en irse para atrás, usandola fórmula de recurrencia y así obtenemos la sucesión de *Negafibonacci*: ..., −8, 5, −3, 2, −1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...(análogamente)

Hasta existen generalizaciones para sucesiones cuyos términos se van obteniendo de los dos primeros con la expresión . (0, 1, *a*;; ,... The Pythagonacci Family Reunion, de *Dan Kalman* que los llamó los *ab-números de Fibonacci.*

PROPIEDADES:

La sucesión de Fibonacci está llena de propiedades matemáticas que parecen **casi mágicas**. Citaremos ahora algunas conocidas propiedades de la sucesión de Fibonacci ordinaria. Pocas de ellas son costosas de demostrar, y desde luego, todas son casos particulares de teoremas válidos para sucesiones generalizadas. Por ejemplo:

- Las razones de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci: que escritos en forma decimal resultan ser: 1, 2, 1.5, 1.6666.., 1.625, 1.61538…., 1.619047…., 1.61764…..,1.6181818…., 1.617977.., 1.6180555….., pues bien estos cocientes tienden a estabilizarse (convergen) hacia el número real , se dice que el límite es (La razón entre cada par de términos consecutivos va oscilando por encima y por debajo de la ***razón áurea***). **(SOLUCIÓN TRUCO DE MAGIA nº 1).** Esta relación la encontró el matemático escocés Robert Simson en 1753.



El límite de las razones de términos consecutivos de la sucesión de Lucas y de cualquier sucesión de Fibonacci generalizada, convergen a : Así en la de Lucas ... Esta propiedad la demostró J. Kepler (1571 − 1630). (La razón entre cada par de términos consecutivos también va oscilando por encima y por debajo de la *razón áurea*).

- En toda sucesión de Fibonacci generalizada la suma de los *n* primeros términos es siempre . **(SOLUCIÓN TRUCO DE MAGIA nº 2)**

Término nº	Sucesión	Suma Acumulada

1º	a	a
2º	b	$a + b$
3º	$a + b$	$2a + 2b$
4º	$a + 2b$	$3a + 4b$
5º	$2a + 3b$	$5a + 7b$
6º	$3a + 5b$	$8a + 12b$
7º	$5a + 8b$	$13a + 20b$
8º	$8a + 13b$	$21a + 33b$
9º	$13a + 21b$	$34a + 54b$
10º	$21a + 34b$	$55a + 88b$
....		
n-ésimo		

La propiedad anterior se ve fácilmente en la tabla, pues =y como , entonces y

MAS TRUCOS DE MAGIA

• Si sumamos 10 números consecutivos de la serie elegidos al azar, el resultado siempre es múltiplo de 11. Así: 21 + 34 + 55 + 89 + 144 +233 + **377** + 610 + 897 + 1597 = 4147 = 11·377. De hecho, **los resultados son iguales a multiplicar por 11 el séptimo número elegido**, en estos dos casos, 377 y 1597.

Término nº	Sucesión	Suma Acumulada
1º	a	a
2º	b	$a + b$
3º	$a + b$	$2a + 2b$
4º	$a + 2b$	$3a + 4b$
5º	$2a + 3b$	$5a + 7b$
6º	$3a + 5b$	$8a + 12b$
7º	$\mathbf{5a + 8b}$	$13a + 20b$
8º	$8a + 13b$	$21a + 33b$
9º	$13a + 21b$	$34a + 54b$
10º	$21a + 34b$	$\mathbf{55a + 88b}$

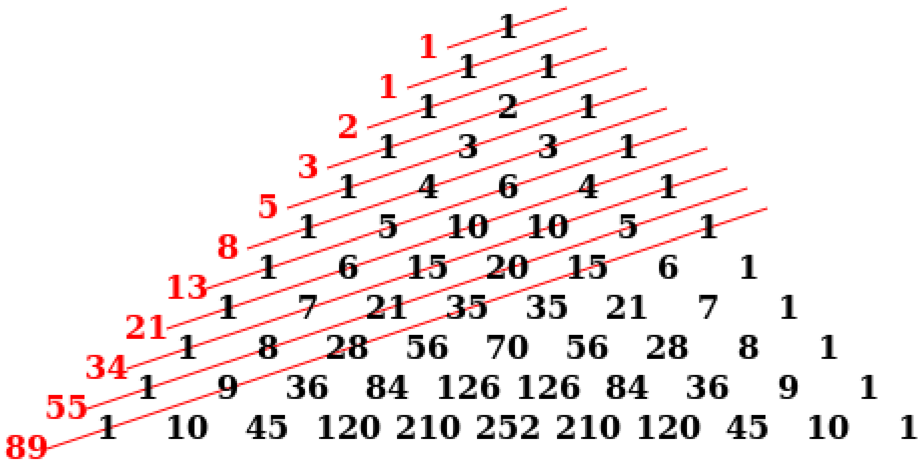
Esta propiedad también podría utilizarse como truco de magia: Pedirle a alguien que elija dos números cualesquiera que los sume y obtenga un tercero, que debe describir debajo del segundo; que sume los dos últimos números y obtenga un cuarto, prosiguiendo de esta forma hasta formar una columna de diez números. Es decir, ha de escribir los diez primeros términos de una sucesión generalizada de Fibonacci, donde cada término es suma de los dos que le preceden, exceptuados los dos primeros, que son arbitrarios. Hecho esto, usted se vuelve, traza una raya por debajo de los diez sumandos, e inmediatamente escribe la suma. La clave consiste en multiplicar por 11 el séptimo de los números a sumar, operación que fácilmente se realiza de cabeza.

• Si sumamos los tres primeros términos que ocupan posición impar (F_1, F_3, F_5) sale el sexto término (F_6), (1 + 2 + 5 = 8). Si sumamos los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (F_1, F_3, F_5, F_7) sale el octavo término (F_8), (1 + 2 + 5 + 13 = 21),... en general si sumamos los n primeros términos impares de la sucesión el resultado es el término de lugar $2n$. En general

- Si sumamos los tres primeros términos que ocupan posición par (F_2, F_4, F_6) y añades 1, sale el séptimo término (F_7), (1 + 3 + 8 + 1 = 13). Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición par (F_2, F_4, F_6, F_8) y añades 1, sale el noveno término (F_9), (1 + 3 + 8 + 21 + 1 = 34),... en general si sumamos los n primeros términos pares de la sucesión el resultado es el término de lugar $2n + 1$. En general

Con estas dos propiedades, es fácil simular grandes dotes de calculista veloz, pudiendo rápidamente calcular la suma de gran cantidad de términos pares e impares de la sucesiones generalizadas de Fibonacci.

- Los números de Fibonacci son la suma de las diagonales (marcadas en rojo) del triángulo de Pascal.



FALACIAS GEOMETRICAS

- Si tomamos tres números adyacentes de la sucesión. Elevamos al cuadrado el número del medio. Multiplicamos los otros entre sí. La diferencia entre estos dos resultados es siempre 1. Por ejemplo, si tomamos {3, 5, 8} vemos que $5^2 = 25$ y que $3 \cdot 8 = 24$. La diferencia resulta ser 1. En general (Identidad de Cassini 1680).

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\UNA FALACIA GEOMÉTRICA I.doc

- Si tomamos cuatro números adyacentes de la sucesión. Multiplicamos los dos de los extremos. Multiplicamos ahora los dos centrales. El primer producto será una unidad mayor o una unidad menor que el segundo. Por ejemplo, si tomamos {21, 34, 55, 89} vemos que $21 \cdot 89 = 1869$, mientras que $34 \cdot 55 = 1870$. $F_n \cdot F_{n-3} - F_{n-2} \cdot F_{n-1} = (-1)^n$

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\UNA FALACIA GEOMETRICA II.docx

- Si tomamos dos términos consecutivos, por ejemplo: $F_4 = 3$ y $F_5 = 5$; elevando al cuadrado y sumando: $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ que es el noveno (4 + 5) término de la sucesión. Tomando $F_6 = 8$ y $F_7 = 13$; elevando al cuadrado y sumando: $8^2 + 13^2 = 64 + 169 = 233$ que es el (6 + 7) decimotercer término de la sucesión. En general.

DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS

- A continuación varias propiedades con sus demostraciones sin palabras. Si elevamos al cuadrado los cinco primeros términos y los sumamos, sale el producto del quinto y el sexto término: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8$. Si hacemos lo mismo para los seis primeros términos, sale el producto del sexto y el séptimo término: $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104 = 8 \cdot 13$,... En general para (también se demuestran en el documento anexo adjunto
- también para
- para y
- , ésta última válida para todo *n*

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\DEMOSTRACIÓN SIN PALABRAS.docx

- También:

ANEXOS\DOCUMENTOS PDF\demostración sin palabras 1.pdf
Que sirve también para demostrar la identidad final al desarrollar, enel cuadrado del binomio, suprimir términos iguales, en cada miembro y simplificar por 2.

- Otra más:

ANEXOS\DOCUMENTOS PDF\demostración sin palabras 2.pdf

La identidad, vista anteriormente, se deduce al ver que el triángulo es equilátero y el lado de la izquierda midemientras que el de la base mide que por la definición de la sucesión de Fibonacci es

Este último documento anexo está muy relacionado con el FIbonacci in the Triangular Lattice que vemos a continuación

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Fibonacci in the Triangular Lattice Hans Walser.docx

- Y finalmente:

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\MÁS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS.docx

TEOREMA DE PITÁGORAS

- Si tomamos 4 términos consecutivos, por ejemplo, 2, 3, 5 y 8; con ellos formamos tres números: Sea *a* el producto de los dos extremos $2 \cdot 8 = 16$; *b* el doble del producto de los dos centrales $2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$ y *c* la suma de los productos de los dos que estan en posición par y de los de posición impar $2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 34$. Estos tres números así obtenidos forman una terna pitagórica (Si entonces)

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Una interesante relación entre los números de Fibonacci y las ternas pitagóricas.docx

DIVISIBILIDAD

- Al contarlos los términos de tres en tres, siempre hay uno de la sucesión que es divisible por 2; al contarlos de cuatro en cuatro, uno de ellos es divisible por 3, uno de cada cinco términos consecutivos es múltiplo de 5; uno de cada seis, es divisible por 8, y así sucesivamente, siendo los divisores, números *F* en sucesión.

- El máximo común divisor de dos números de Fibonacci es otro número de Fibonacci. Más concretamente: . Veamos algún ejemplo: ; ; .

SUCESIONES DE LUCAS Y EL NÚMERO DE ORO

- La íntima relación existente entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea queda de manifiesto en la siguiente fórmula explícita para el *n*-ésimo término de Fibonacci:; mientras que el *n*-ésimo término de la sucesión de Lucas es (Fórmulas que presentó el matemático francés Jacques Binet en 1843).

- Las sucesiones de Fibonacci y Lucas están interrelacionadas por docenas de fórmulas sencillas. Por ejemplo, el *n* -ésimo número de Lucas es igual a . El producto de y es igual a

.

VARIAS

- Dado un número cualquiera de las sucesiones generalizadas de Fibonacci, para calcular el término siguiente no es preciso conocer su subíndice (el lugar que ocupa). Sea *A*, el término dado, con tal de que sea mayor que 3. El siguiente viene dado por donde los corchetes indican que es necesario tomar la parte entera de la expresión, es decir, el entero más cercano por defecto. Por ejemplo *A* = 89;

- Dado un número cualquiera *N*, ¿cómo podemos saber si es uno de Fibonacci? Gessel en el año 1972 encontró un sencillo test para averiguarlo, el test dice así: *N* es un número de Fibonacci si y sólo si ó son cuadrados perfectos. Por ejemplo 3 es un número de Fibonacci pues $5 \cdot 3^2 + 4 = 5 \cdot 9 + 4 = 45 + 4 = 49 = 7^2$, análogamente 5 lo pues $5 \cdot 5^2 - 4 = 125 - 4 = 121 = 11^2$. Sin embargo 4 no lo es pues $5 \cdot 4^2 + 4 = 84$ y $5 \cdot 4^2 - 4 = 76$ no son cuadrados perfectos

- Y la última propiedad

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Teorema de Zeckendorf.docx

NÚMEROS INVERSOS Y FRACCIONES AMIGAS DE FIBONACCI

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\NÚMEROS INVERSOS DE FIBONACCI.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Constante de los inversos de Fibonacci.docx

FRACTALES

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\EL FRACTAL DE FIBONACCI.doc

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\LA ROSA DE FIBONACCI.doc

GENERALIZACIONES

Recordamos que el número de oro verifica la ecuación: y es fácil de demostrar, que también, la:

Una generalización de los números (la sucesión) de Fibonacci son los ***números de Tribonacci*** donde cada uno es la suma de los tres que le preceden. Los números de «Tribonacci» (0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...) fueron así bautizados por el joven y brillante matemático Mark Feinberg, quien publicó un artículo sobre ellos en *The Fibonacci Quarterly*, (octubre de 1963), cuando sólo contaba 14 años. Su carrera en la Universidad de Pennsylvania quedó truncada en 1967, en su segundo año de universidad, al morir en un accidente de motocicleta. En su artículo sobre números de Tribonacci, Feinberg puso de relieve que al ir avanzando en la sucesión, la razón entre cada término y el anterior converge hacia el número t = 1,83928... (**constante de Tribonacci**) que verifica las: .

Se puede avanzar en la generalización y considerar sucesiones donde cada término sea suma de los cuatro (**números de Tetranacci**), cinco, seis, etc., números que lo anteceden, y los dos son los correspondientes de la sucesión de Fibonacci (se añaden ceros al inicio, para no tener que dar cada vez más valores iniciales). Tal generalización había sido publicada en 1913 por Mark Barr (el matemático que asigno la letra al número de oro).

Los primeros números de Tetranacci son: 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208,... La constante de tetranacci es la razón es la raíz del polinomio de valor 1.92756 ... también satisface la ecuación: .

Las sucesiones de **Pentanacci**, **Hexanacci** y **Heptanacci**,... también han sido calculadas. Los números de Pentanacci son: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, … Los números de Hexanacci son: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, 248, 492, … Los de Heptanacci: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 253, 504, 1004, 2000, … Los Octanacci: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 255, 509, 1016, 2028, 4048, ... Los Nonacci: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 511, 1021, 2040, 4076, ... (quitando los primeros ceros cada vez salen más potencias de 2).

En todas estas sucesiones, la razón de cada término con el anterior tiene un límite; al ir aumentando el número de términos a sumar, la razón límite aumenta, tendiendo a su vez hacia 2. El límite de la razón de los sucesivos términos de una sucesión n-nacci tiende a la raíz de la ecuación: o la (**constante *n*-acci**).

OTROS QUE HAN JUGADO CON LAS SUCESIONES DE FIBONACCI:

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\La sucesión de Fibonacci en la naturaleza.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\LA SUCESIÓN DE FIBONACCI ESTÁ EN TODAS PARTES.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Arte y sucesiones de Fibonacci.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Instalación Expo Angel Arrudi Fernando Bayo.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\Media docena más de Fibonaccis.doc

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\La sucesión de Fibonacci en la cultura popular.docx

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\EL MODULOR DE LE CORBUSIER.docx

ALGUNAS APLICACIONES MATEMÁTICAS

La sucesión de Fibonacci ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos, debido a su tendencia a presentarse en los lugares más inopinados, pero sobre todo, porque el más novel de los aficionados en teoría de números, aun con conocimientos poco más allá de aritmética elemental, puede aspirar a investigarla y descubrir curiosos teoremas inéditos, de los que parece haber variedad inagotable. Por cierto la más importante de las cuestiones sobre sucesiones de Fibonacci todavía pendientes es: ¿existirá una infinidad de números primos en la sucesión de Fibonacci?

La sucesión de Fibonacci tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación (técnicas de recuperación de información digital, clasificación de datos, recuperación de informaciones, generación de números aleatorios, matemáticas (cálculo aproximado de máximos y mínimos de funciones de las que no se conoce la derivada), teoría de juegos

ANEXOS\DOCUMENTOS WORD\EL NIM DE FIBONACCI.docx

RESUMEN

ANEXOS\VIDEOS\Universo matematico-Mas.Por.Menos.Fibonacci.La.Magia.De.Los.Numeros.avi

.