Preparación Olímpica IV
Soluciones

Rubén Blasco García

11 de diciembre de 2015

Problema 1. En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas divididos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos a los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de altura entre los miembros de la nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm. (Fase Local OME 2013)

Solución:

Sean $P_1, P_2, ..., P_{15}$ las 15 parejas iniciales. Ordenemos ahora a los chicos por alturas $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{15}$, y también a las chicas $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_{15}$. Supongamos que una de las parejas tuviera una diferencia de alturas superior a 10 cm, digamos $a_k - b_k > 10$. Entonces las parejas formadas por las chicas $b_1, ..., b_k$ y los chicos $a_k, ..., a_{15}$ también cumplirán $a_i - b_j > 10$. Coloquemos ahora cada una de las 16 personas mencionadas, de alturas $b_1, ..., b_k, a_k, ..., a_{15}$ en las parejas P_s iniciales, según el lugar que ocupaban. Por el principio del palomar, dos personas estarán en la misma pareja. Por lo tanto, entre las parejas iniciales, había una con una diferencia de altura mayor que 10 cm, lo que contradice la hipótesis del problema.

Problema 2. Sea $n > 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que siempre que formamos n parejas con dos bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.

1. Demuestra que hay 4 bolas con el mismo número.
2. Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es $n - 1$.

(Fase Local OME 2015)

Solución:

1. Sean los valores de las bolas en orden creciente $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{2n}$. Formemos la pareja k-ésima emparejando la bola a_{2k-1} con la a_{2k} para $k = 1, 2, ..., n$, con lo que sus sumas son:

$$s_1 = a_1 + a_2 \geq s_2 = a_3 + a_4 \geq ... \geq s_n = a_{2n-1} + a_{2n}$$

. Al estar las sumas en orden no creciente, si dos de ellas son iguales tienen que ser dos sumas consecutivas, es decir ha de ser $a_{2k-1} + a_{2k} = a_{2k+1} + a_{2k+2}$, con $a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq a_{2k+1} \geq a_{2k+1}$, luego obviamente estos cuatro enteros han de ser iguales.

2. Supongamos que hay al menos n valores distintos, que podemos ordenar en orden decreciente $b_1 > ... > b_n$. Ordenamos los valores de las restantes n bolas en orden no creciente $c_1 \geq ... \geq c_n$. Haciendo las parejas (b_i, c_i) para $i = 1, 2, ..., n$, es claro que las parejas i-ésima e $i + 1$-ésima tienen valores $b_i + c_i > b_{i+1} + c_{i+1}$, con lo que las parejas están ordenadas con valores de suma estrictamente decrecientes, y no puede haber dos con la misma suma. Llegamos a una contradicción. Luego hay a lo sumo $n - 1$ valores distintos.

Problema 3. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma.

Hallar la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas. (Fase Local OME 2010)

Solución:

Una forma de hacer una disposición en la que no haya dos hayas consecutivas puede ser imaginar plantados todos los robles y todas las encinas y colocar las cinco hayas entre los huecos y los extremos; tenemos pues ocho sitios donde colocar las hayas.

El problema puede plantearse de dos maneras distintas aunque el resultado final es el mismo.

I) Suponemos que no es posible distinguir los robles entre sí, las encinas entre sí, ni las hayas entre sí. En este caso, el número total de disposiciones será igual a las permutaciones con repetición de 12 elementos, de los que 3, 4 y 5 son iguales entre sí; esto es $\frac{12!}{3!4!5!}$.

El número de disposiciones favorables es igual a las combinaciones de 8 elementos tomados de 5 en 5 multiplicado por el número de permutaciones con repetición de 7 elementos de los que 3 y 4 son iguales entre sí. La probabilidad es:

$$p_1 = \frac{\frac{8!}{5!3!}\frac{7!}{3!4!}}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7}{11\cdot 9} = \frac{7}{99}.$$

II) Suponemos que es posible distinguir entre los robles, encinas y hayas. En este caso el número total de disposiciones es 12!, y el de disposiciones favorables es el producto de 7! (la forma de colocar los robles y las encinas) por $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$ (las formas de colocar las hayas de forma que no haya dos consecutivas). La probabilidad es:

$$p_2 = \frac{7!\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{12!} = \frac{7}{11\cdot 9} = \frac{7}{99}.$$

Problema 4. Saber cual es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, ¿pero cuántos ceros preceden a esta última cifra? (Fase Local OME 2011)

Solución:

Si $n \geq 1$,

$$2009^n = (2000+9)^n = 9^n + 2000k$$

.

Por lo tanto, las tres últimas cifras de 2009^n coinciden con las de 9^n. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$$9^{2011} = (10-1)^{2011} = (-1)^{2011} + \binom{2011}{1}(-1)^{2010}\cdot 10 + \binom{2011}{2}(-1)^{2009}\cdot 10^2 + K\cdot 10^3$$
$$= -1 + 20110 - 2011\cdot 1005\cdot 100 + K\cdot 10^3 = -202085391 + K\cdot 10^3 =$$
$$20208600 - 202085391 + K'\cdot 10^3 = 691 + K'\cdot 10^3.$$

Luego la respuesta es que 9 es la última cifra y le precede un único cero.

Problema 5. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente.Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color. (Fase Local OME 2009)

Solución:

Consideramos un punto que esté conectado con el número más alto de puntos de otro color. Supongamos que este punto N es de color negro y que está conectado a k puntos de color blanco. Como $k \leq n$ y N está conectado a $n+1$ puntos, existirá un punto azul A al que está conectado N. El número de puntos negros a los que está conectado A es necesariamente menor o igual que k, por lo que A está conectado al menos a $n+1-k$ puntos blancos. Como solo hay n puntos de color blanco, y el número de conectados con N

y conectados con A suman $n+1$, debe haber un punto blanco conectado a ambos, por lo que ya tenemos el triángulo buscado.

Problema 6. En el sótano de un castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Solución 1:

El número de combinaciones de los 7 gnomos tomados de 3 en 3 es $\binom{7}{5} = 35$; pero cada gnomo va a estar en $\binom{6}{2} = 15$ grupos distintos. Así, entre cada 3 gnomos tienen que tener 144 llaves. Luego el número mínimo de llaves es 35 x 144 /15 = 336

Solución 2:

En total hay 144 cerraduras. Entre todos los gnomos deben tener al menos 5 llaves de cada cerradura, ya que si de alguna cerradura tuviesen a lo sumo 4 llaves, habría al menos 3 gnomos que no tuviesen la llave para abrirla y por tanto estos 3 gnomos no podrán llegar al tesoro; contradicción. Por tanto, el número mínimo de llaves que tienen los gnomos es 144 x 5 = 720.

Nota. Vemos que la cota propuesta originalmente puede ser mejorada. El enunciado no es incorrecto pero se podría refinar cambiando 336 por 720.

Problema 7 En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que independientemente de cuales sean los n segmentos elegidos y de como de haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color. (OME 2011)

Solución:

Veamos en primer lugar que con n=2010 no es suficiente.

Diremos que un segmento es de tamaño r, si une dos vértices entre los que siguiendo el camino más corto por los lados del polígono hay otros r-1 vértices. Elegimos los 2010 segmentos de tamaño mayor que 3 (De tamaño mayor que 3 hay $60 \cdot 67/2 = 2010$ segmentos exactamente). Para cada r entre 1 y 10 asignamos el color r a los segmentos de tamaño 3r+1,3r+2,3r+3 (notar que el tamaño máximo es 33). Es claro que cada vértice pertenece a 6 segmentos de cada color.

Ahora probaremos que si n=2011 hay algún vértice que está en 7 segmentos del mismo color. En los 2011 segmentos intervienen contando repeticiones 4022 vértices, luego por el principio del palomar como $4022 > 60 \cdot 67$, algún vértice interviene en al menos 61 segmentos, de los cuales de nuevo por el principio del palomar al menos 7 serán del mismo color.