Problema 1. Sean p, q y r números primos tales que

$$r - q = 2p, \quad rq + 2p = 676.$$

Hallar el valor de pqr.

Solución. La primera ecuación del enunciado nos dice que $r - p = q + p$. Si llamamos x a esta cantidad entonces

$$x^2 = (r-p)(q+p) = rq + (r-q)p - p^2 = p^2 + rq = 676.$$

(En las dos últimas igualdades hemos usado las ecuaciones del enunciado.)

Por tanto, $x = 26$. Luego p es un número primo tal que $26 + p$ y $26 - p$ son primos. Es inmediato comprobar que la única posibilidad es $p = 3$. Entonces $q = 26 + 3 = 29$ y $r = 26 - 3 = 23$. Así que $pqr = 2001$. $\square$

Problema 2. Hallar todos los pares de enteros positivos m y n tales que

$$n! + 1 = (m! + 1)^2.$$

Solución. Expandiendo el lado derecho de la ecuación del enunciado y simplificando, obtenemos

$$n! = m!(m! - 2).$$

De aquí deducimos inmediatamente que $m \geq 3$ y que $n > m$. Dividiendo por $m!$ en la última ecuación tenemos

$$n(n-1)\cdots(m+1) = m! - 2.$$

Notar que como $m!$ es múltiplo de 3, luego el miembro de la derecha de la ecuación anterior no es múltiplo de 3. Entonces el miembro de la izquierda tendrá a lo sumo dos factores. Distinguimos estos dos casos.

Caso 1: $n = m + 2$ (dos factores). Es decir, $(m+2)(m+1) = m! - 2$; o bien, $m^2 + 3m + 4 = m!$. Esto implica que $m|4$. Como m era mayor o igual que 3, sólo puede ser $m = 4$. Pero es fácil comprobar que esta no es solución.

Caso 2: $n = m + 1$ (un solo factor). Es decir, $m + 1 = m! - 2$; o bien, $m = m! - 3$. Esto implica que $m|3$. Como m era mayor o igual que 3, sólo puede ser $m = 3$. Es inmediato comprobar que $m = 3$ y $n = 4$ sí es solución. Por tanto, ésta es la única. $\square$

Problema 3. Escribimos 14 números enteros en la pizarra con la propiedad de que al borrar uno cualquiera de ellos podemos agrupar los 13 restantes en tres montones de igual suma.

a) Demostrar que cada uno de los 14 números es múltiplo de 3.

b) ¿Es posible que alguno de los 14 números escritos no sea el 0?

Solución. Sean $a_1, \dots, a_{14}$ los 14 números escritos en la pizarra y denotemos por S su suma. Nos dicen que $S - a_i = 3b_i$ para cada $i = 1, \dots, a_{14}$, donde b_i es la suma de cada montón. Sumando estas igualdades obtenemos

$$13S = \sum_{i=1}^{14}(S - a_i) = \sum_{i=1}^{14} 3b_i = 3\sum_{i=1}^{14} b_i.$$

Luego $3|S$. Esto prueba (a).

Sea por tanto $d_i = a_i/3$, para cada $i = 1, \dots, a_{14}$. Notar que los números $d_1, \dots, d_{14}$ siguen cumpliendo la propiedad del enunciado. Entonces, por el apartado (a), cada d_i es múltiplo de 3. Siguiendo así sucesivamente, deducimos que necesariamente

$$a_1 = \cdots = a_{14} = 0,$$

lo cual responde a (b). □

Problema 4. Los números naturales $22, 23$ y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de su descomposición en factores primos son todos impares:

$$22 = 2^1 \cdot 11^1, \quad 23 = 23^1, \quad 24 = 2^3 \cdot 3.$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?

Solución. Supongamos que hay 8 números naturales consecutivos que satisfacen la propiedad del enunciado. Uno de ellos, llamémosle n, es múltiplo de 8. Entre los 8 números o bien está $n+4$ o está $n-4$. Ese número será múltiplo de 4 pero no de 8. Por tanto, en su descomposición en factores primos el exponente del primo 2 es 2; es decir, un número par. Esto contradice la propiedad del enunciado. Por tanto, a lo sumo hay 7 números consecutivos con tal propiedad.

Notar que los números

$$29, 30, 31, 32, 33, 34, 35$$

tienen la propiedad del enunciado. Luego el máximo que buscamos es 7. $\square$

Problema 5. Probar que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser cuadrado ni cubo perfecto.

Solución. Sean $a-1, a, a+1$ y $a+2$ cuatro naturales consecutivos. Una sencilla manipulación algebraica nos da

$$(a-1)a(a+1)(a+2) = (a^2+a+1)^2 - 1,$$

de donde deducimos inmediatamente que el producto de cuatro naturales consecutivos nunca puede ser cuadrado perfecto.

Supongamos que a es impar. Entonces a es coprimo con los otros tres números naturales. Por tanto, si el producto fuese un cubo perfecto, entonces tanto a como $(a-1)(a+1)(a+2)$ serían cubos perfectos. Sin embargo, una sencilla manipulación algebraica nos da

$$a^3 < (a-1)(a+1)(a+2) < (a+1)^3,$$

lo cual es una contradicción. Finalmente, si $a+1$ es impar, entonces $a+1$ es coprimo con los otros factores, luego tanto $a+1$ como $a(a-1)(a+2)$ serían cubos perfectos. Sin embargo,

$$(a-1)^3 < a(a-1)(a+2) < (a+1)^3,$$

lo cual es nuevamente una contradicción. Por tanto, el producto de cuatro naturales consecutivos nunca puede ser cubo perfecto. $\square$

Problema 6. Probar que para todo número primo p se cumple que

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Solución. Para $p=2$ y $p=3$ el resultado es claro. Supongamos $p \geq 5$. Sea $S := \{2, 3, \ldots, p-2\}$. Como p es primo, cada $s \in S$ tiene un único inverso mod p, digamos s'. Notar que s' es distinto de 1 y de $p-1$, y además $s' \neq s$. En efecto, en caso contrario $s^2 \equiv 1 \pmod{p}$ y entonces p dividiría a $s-1$ o a $s-1$, lo cual es imposible. Por tanto, podemos agrupar los elementos de S en $(p-3)/2$ pares distintos (s, s') tales que $ss' \equiv 1 \pmod{p}$. Luego $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$, de donde se sigue el enunciado. $\square$