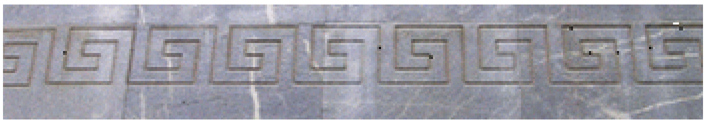
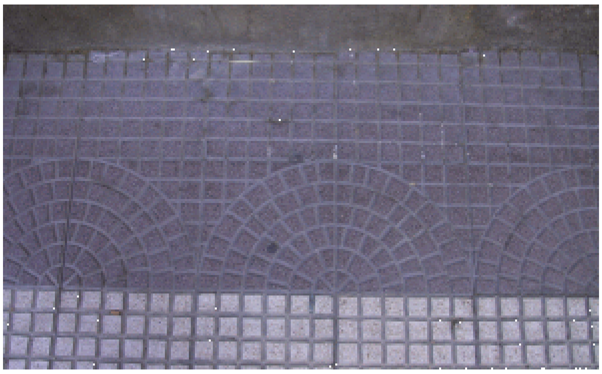
¿SABEN LAS ABEJAS MATEMÁTICAS?

A lo largo de los años se ha utilizado la geometría con fines decorativos. Vasijas, tejidos, suelos, muros, puertas, ventanales… han sido decorados con diseños geométricos regulares. Es curioso cómo se ha decorado el plano a lo largo de la historia utilizando alrededor de media docena de diseños básicos. Ha sido habitual el uso de "ajedrezados", "escamas", "zigzags", "ruedas solares" en la decoración de tejidos, muebles o utensilios domésticos, suelos y paredes, produciendo diseños periódicos.

FRISOS

Los frisos, se forman por la repetición de un determinado módulo, figura o motivo a lo largo de una única dirección (banda rectangular), dándose siempre una periodicidad sistemática en la repetición del módulo. Son cubrimientos de regiones de longitud infinita pero de anchura finita.





Los movimientos en el plano que pueden formar parte de un friso son:

- Las traslaciones de vector paralelo a los bordes de la región.

- Los giros de 180º cuyo centro equidista de los bordes de la región"

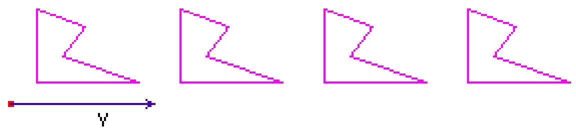
- Las simetrías cuyo eje es la recta que equidista de los bordes de la región o es perpendicular a dicha recta, es decir, simetrías horizontal y vertical.

- Las simetrías en deslizamiento cuyo eje es la recta que equidista de los bordes de la región.

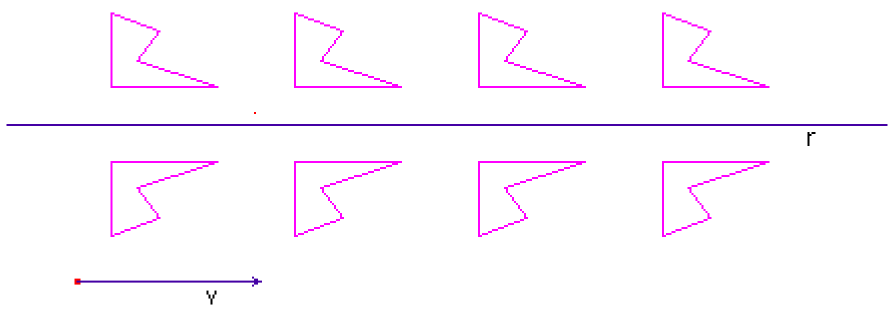
Analizando las posibles combinaciones de estos movimientos, se puede demostrar que hay exactamente 7 frisos diferentes.

Nosotros vamos a aprender a cuáles son y cómo de identifican. Aquí tenemos un ejemplo de cada uno de ellos:

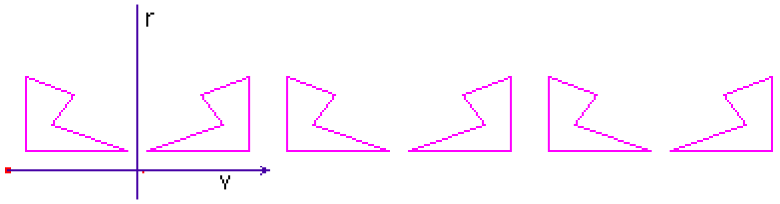
1.Friso de las traslaciones.



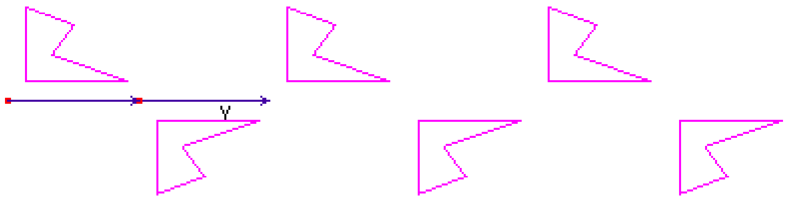
2.Friso de las traslaciones y la simetría horizontal.



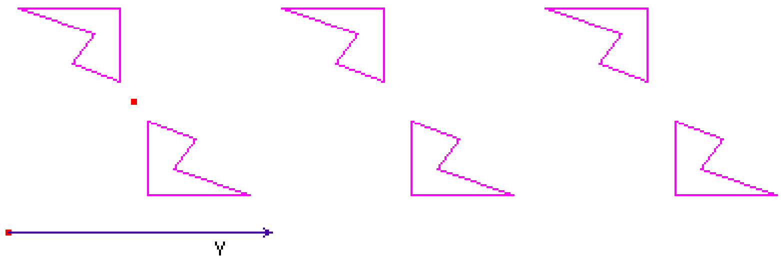
3.Friso de las traslaciones y la simetría vertical.



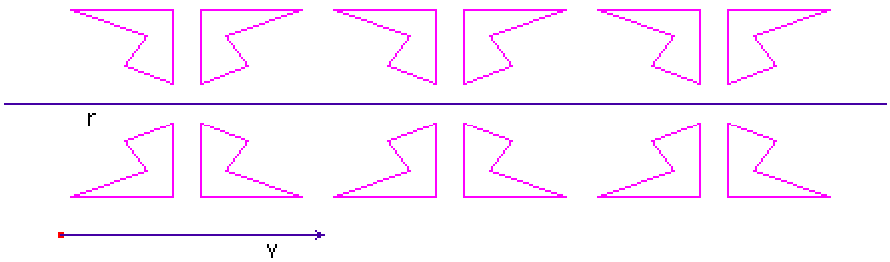
4. Friso de las traslaciones y del deslizamiento.



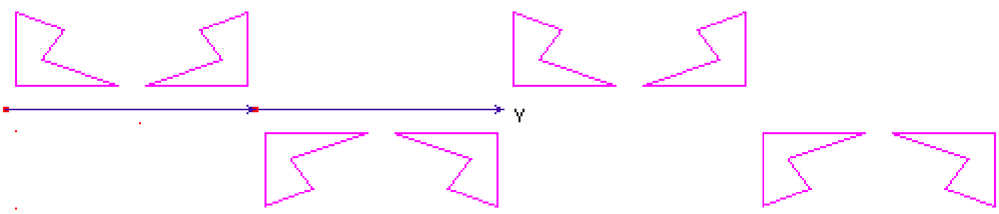
5. Friso de las traslaciones y del giro 180°.



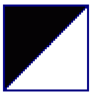
6. Friso de las traslaciones, el giro 180° y la simetría horizontal.



7. Friso de las traslaciones, la simetría vertical y el deslizamiento.



ACTIVIDAD 1: Utilizando el siguiente motivo (muy usual en el Mudéjar Aragonés, formado por dos triángulos, uno blanco y el otro negro), intenta construir los siete frisos posibles



MOSAICOS

Los mosaicos son un tipo especial de recubrimiento del plano. Surgen de la repetición de un determinado módulo, figura o motivo en dos direcciones independientes del plano, al aplicarles determinados movimientos (traslaciones, giros, simetrías o deslizamientos).

Los mosaicos, al igual que los frisos, se pueden generar a partir de un motivo mínimo (teselas), generalmente poligonales que no se solapan, ni dejan huecos, mediante la combinación de diferentes movimientos. Fedorov, matemático y cristalógrafo ruso, fue quien hizo el primer tratamiento matemático de estos aspectos en 1891, cuando demostró que no hay más que 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano formando mosaicos periódicos.

MOSAICOS REGULARES

¿Cualquier polígono regular tesela el plano? ¿Qué polígonos regulares cumplen la propiedad de teselar el plano? ¿No hay más? ¿Por qué?

Para ello empezaremos recordando el valor de los ángulos interiores de los distintos polígonos regulares.

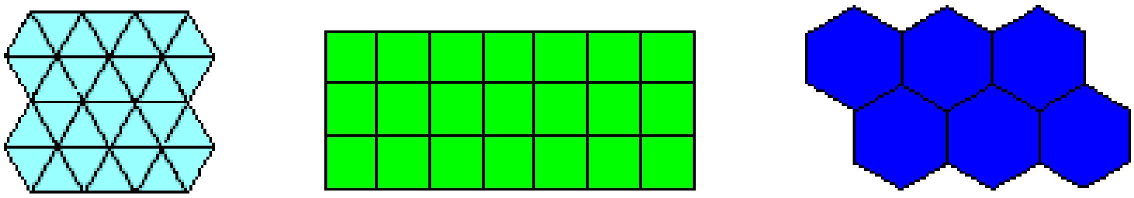
Nombre polígono	Número de lados	Nº diagonales desde un vértice	Valor del ángulo interior
Triángulo	3	0	60º
Cuadrado	4	1	90º
Pentágono	5	2	108º
Hexágono	6	3	120º
Heptágono	7	4	128º 34' 17,14''
Octógono	8	5	135º
Decágono	10	7	144º
Dodecágono	12	9	150º

Llamando *m* al número de polígonos en inciden en cada vértice y *n* al número de lados del polígono regular nos encontramos con la igualdad:

$m \cdot \frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 360^{o}$, con *n* y *m* mayores que 2.

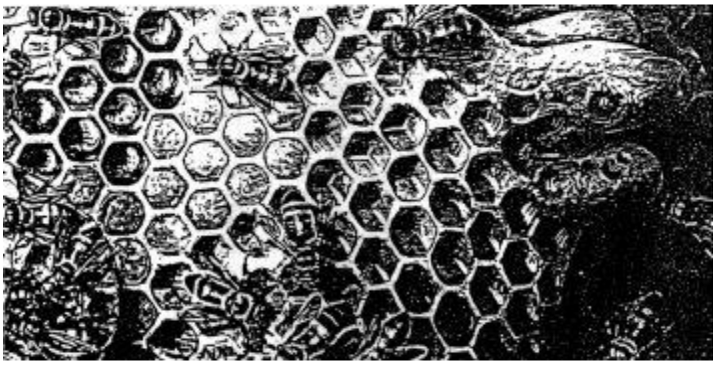
ACTIVIDAD 2: Buscar las soluciones naturales (resolver la ecuación diofántica) que cumplan la ecuación anterior para los valores de *n* y *m*:

Los únicos tres polígonos regulares que recubren (teselan) el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono, como se puede ver gráficamente en l siguiente figura.



UNA PROPIEDAD CURIOSA:

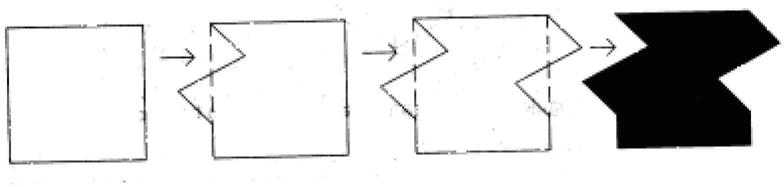
Si miras un panal de abejas observarás que el teselado de este "plano" (en realidad no es un plano) está hecho de hexágonos regulares. También podían haber utilizado triángulos o cuadrados, como hemos visto. Se dice por ello que las abejas son“muy inteligentes” y que no usan más cera que la necesaria para fabricar sus celdillas.



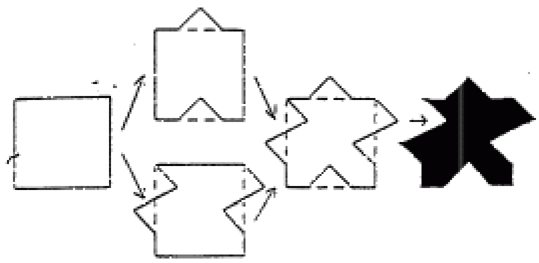
ACTIVIDAD 3: Demuestra que, de los tres polígonos regulares que teselan el plano, para un perímetro común P, el hexágono regular es el que tiene área máxima.

Además de los enlosados que hemos trabajado con polígonos regulares existe la posibilidad de rellenar una superficie empleando polígonos irregulares tanto convexos como cóncavos. ¿Se podrá hacer con cualquier tipo de polígono irregular.

Consideremos un cuadrado; deformemos uno de sus lados y traslademos esta deformación a su lado opuesto, según se ve en la figura.



Antes hemos trabajado deformando dos lados paralelos de un cuadrado, ¿se podría formar una teselación con un cuadrado al que hemos deformado dos lados contiguos y hemos trasladado las deformaciones a sus lados opuestos? Fíjate en la figura siguiente.

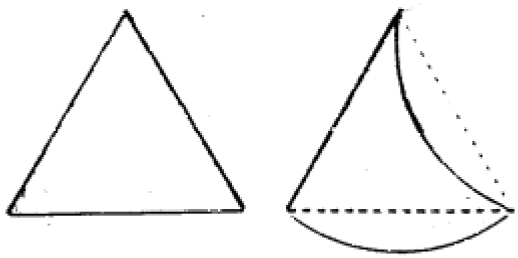


¿Qué ocurriría en el hexágono regular?, ¿se pueden deformar los lados paralelos y posteriormente utilizar esta pieza para teselar el plano? Trata de inventarte alguna tesela con estas características.

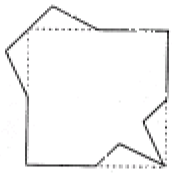
Si trabajamos con un triángulo equilátero, nos damos cuenta que no podemos trasladar una deformación de un lado a otro paralelo, aquí hay que efectuar un giro respecto a un vértice.

Partiendo del triángulo equilátero, deformemos uno de sus lados, giremos la deformación con respecto a un vértice para formar el lado al que te lleve el giro, tal y como muestra la figura.

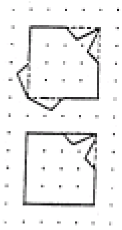
Esta nueva pieza, ¿tesela el plano?

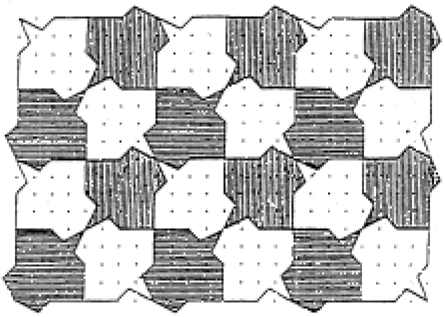


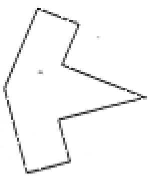
Ahora te presentamos algunas teselaciones obtenidas por deformación, que los árabes realizaban, partiendo de tramas básicas, resultando composiciones de figuras interesantísimas que rellenaban el plano. Observa las que hay a continuación que están tomadas de los muros de La Alhambra de Granada. Estas losetas se llaman *nazaritas* y están formadas a partir de los tres polígonos regulares que teselan el plano. En la primera de ellas te muestro cómo se obtiene una de las losetas. Intenta encontrar el polígono del cual se han obtenido las otras y explícalo.



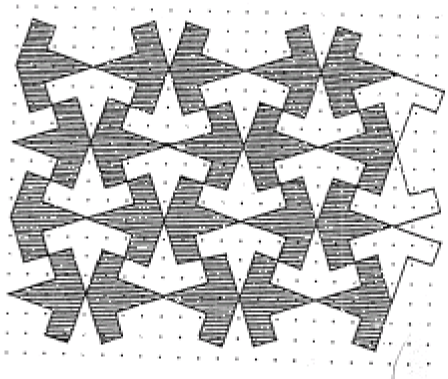
"Pez volador"

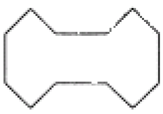




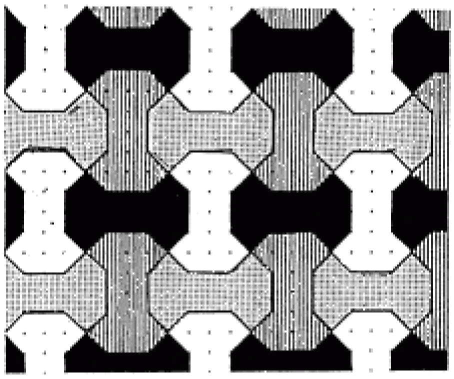


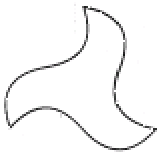
"Avión"



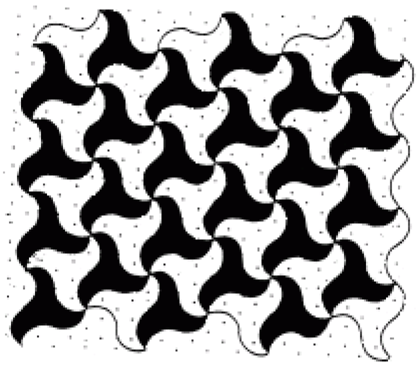


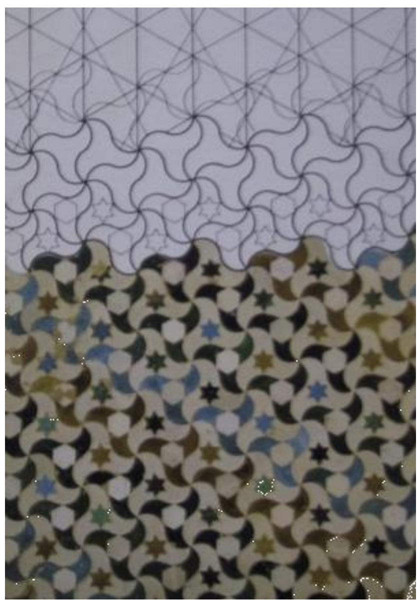
"Hueso"



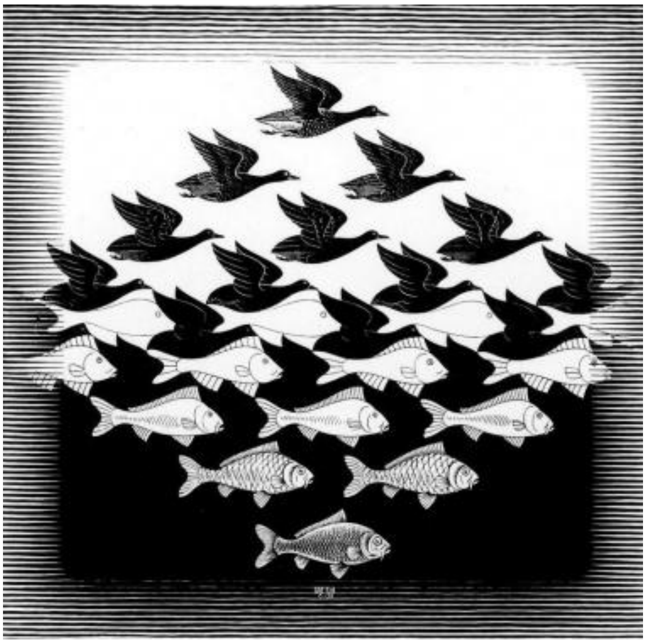


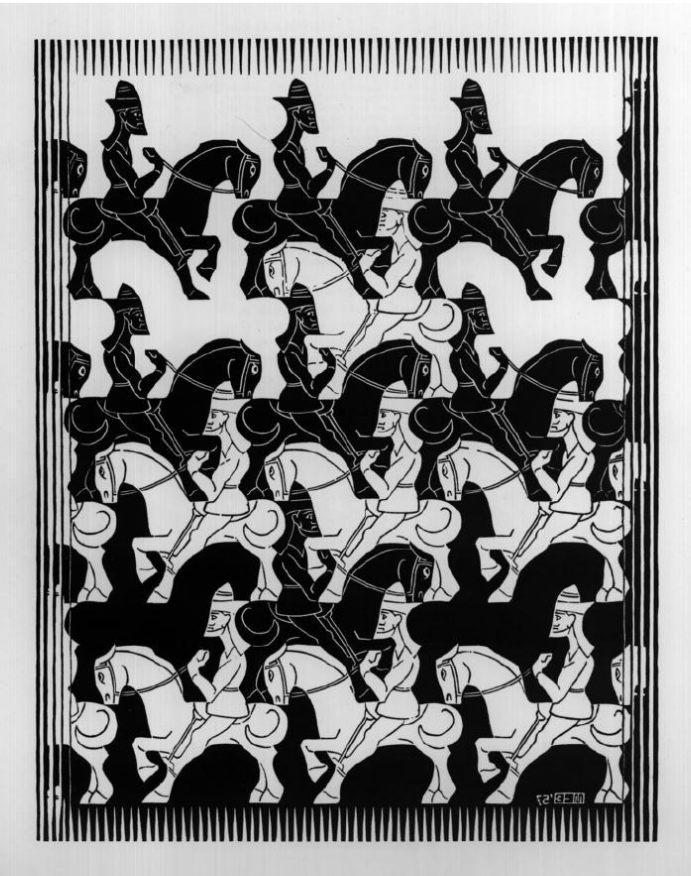
"Pajarita"





Maurits Cornelius Escher (1898-1972) fue un artista gráfico nacido en los países bajos y reconocido por sus dibujos acerca de ilusiones espaciales, edificios imposibles, patrones geométricos repetitivos (teselaciones) y sus increíbles técnicas en el tallado de la madera y la litografía. http://www.psicoactiva.com/curios/escher/escher.htm





MOSAICOS SEMIREGULARES

Llamaremos mosaico semiregular a la composición formada por dos o más tipos de polígonos regulares.

Kepler demostró que se pueden obtener sólo las siguientes ocho combinaciones: (se indican los polígonos que confluyen en un vértice)

- 2 hexágonos + 2 triángulos equiláteros
- 1 hexágono + 1 triángulo equilátero + 2 cuadrados
- 2 cuadrados + 3 triángulos equiláteros. Dos formas diferentes.
- 2 dodecágonos + 1 triángulo equilátero
- 2 octógonos + 1 cuadrado
- 1 dodecágono + 1 hexágono + 1 cuadrado
- 1 hexágono + 4 triángulos equiláteros

Con unos pocos más polígonos y un poco de color aparecen en la figura siguiente los 8 recubrimientos que constituyen los mosaicos semiregulares: