

# TALLER DE FRACTALES.

MARIO ESCARIO GIL

## ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Ejemplos	2
2.1. El conjunto de Cantor	2
2.2. Curva de Koch	4
2.3. Triángulo de Sierpinski	6
3. Autosemejanza	7
4. Dimensión	9
4.1. El conjunto de Cantor	10
4.2. La curva de Koch	10
4.3. El triángulo de Sierpinski	10
5. Otros objetos fractales.	10
5.1. Dimensión fractal	11
5.2. Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una población.	13
Referencias	13

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1623, Galileo<sup>1</sup> escribía:

"La filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo, siempre abierto ante nuestros ojos, pero imposible de leer salvo que uno aprenda a comprender el idioma en que está escrito. Ese idioma es el de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender una sola palabra; sin ellas, vagamos por un laberinto oscuro."

Y, sin embargo, resulta obvio, como dice Benoit Mandelbrot<sup>2</sup> en *The Fractal Geometry of Nature* (1975) que "... Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son circulares, la corteza de un árbol no es suave y los relámpagos no viajan en línea recta."

---

<sup>1</sup>*Galileo Galilei* (Pisa, 1564 - Florencia, 1642), fue un astrónomo, filósofo, matemático y físico que estuvo relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminentemente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura).

<sup>2</sup>*Benoit Mandelbrot* (1924 en Varsovia, Polonia). En 1967 publicó en *Science* "¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?", donde se exponen sus ideas tempranas sobre los fractales. Hombre tremendamente polifacético fue profesor de economía, de ingeniería, de fisiología y matemáticas en las más prestigiosas universidades además de trabajar para empresas privadas como IBM.

## 2. EJEMPLOS

Todos los ejemplos que siguen fueron creados a finales del siglo XIX o a comienzos del siglo XX. Nada más ver la luz fueron tachados de monstruos geométricos por algunos famosos matemáticos de la época como Poincaré<sup>3</sup>. A la larga alentaron la búsqueda rigurosa de conceptos como infinito, curva continua o dimensión. Esparcidos por la literatura matemática y física, fueron recopilados por Benoit Mandelbrot a mediados del siglo XX, en forma de museo de los horrores, con ánimo de fundar una nueva teoría geométrica: los fractales. Veamos algunos de ellos.

**2.1. El conjunto de Cantor**<sup>4</sup>. Toma su nombre del autor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo. Su verdadero creador fue Henry Smith<sup>5</sup>, un profesor de geometría de Oxford, en 1875. Es uno de los fractales más antiguos. Para obtenerlo se procede del siguiente modo:

Partimos de un segmento de tamaño unidad. Dividimos el segmento en tres subsegmentos de tamaño  $\frac{1}{3}$  cada uno. Borrarnos el central de forma que nos quedamos con los intervalos **cerrados** restantes. Repitiendo la división en tres partes para cada uno de estos segmentos y borrando de nuevo el fragmento central de cada uno, obtenemos los cuatro intervalos cerrados siguientes donde cada uno posee longitud  $\frac{1}{9}$ . Este proceso sigue indefinidamente según se muestra en la figura 2.2

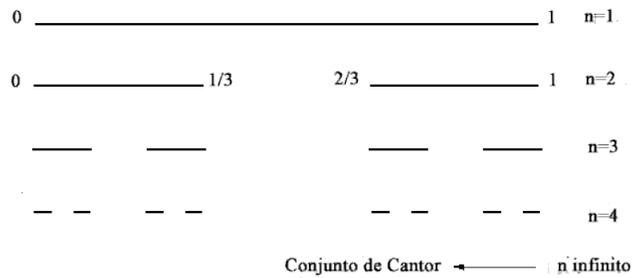


FIGURA 2.1. Conjunto de Cantor.

<sup>3</sup>*Henri Poincaré* (Francia, 1854 - 1912), fue un prestigioso matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia. Descrito a menudo como el último «universalista» (después de Gauss) capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática.

<sup>4</sup>*Georg Cantor* (San Petersburgo, 1845 - Alemania 1918), fue un matemático alemán, inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). Hoy en día, la comunidad matemática reconoce plenamente su trabajo, y admite que significa un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico. Murió en una clínica psiquiátrica de monjas, aquejado de una enfermedad maniaco-depresiva (la cual se le atribuye a su edad).

<sup>5</sup>*Henry Smith* (1826 Dublin, Irlanda - 1883 Oxford, Inglaterra) fue un matemático recordado por sus trabajos de formas cuadráticas en teoría de números. Su nombre es visible aún en teoría de matrices por la llamada "Forma Normal de Smith" de una matriz (matriz diagonal asociada a la matriz mediante transformaciones elementales).

**Exercise 1.** Según la descripción realizada para el conjunto de Cantor completa la siguiente tabla:

Paso	1	2	3	4	5	...	$n$
Número de segmentos	1	2	4			...	
Longitud de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$			...	
Longitud de la figura	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$			...	
Longitud de los segmentos eliminados	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$			...	

Veamos algunas propiedades del conjunto de Cantor:

**Proposition 2.** *La longitud del total de segmentos eliminados es 1.*

*Demostración.* Según el ejercicio anterior en el paso  $n$  la longitud de los segmentos eliminados es  $\frac{2^n}{3^n}$  por lo que la suma de los segmentos eliminados hasta el paso  $n$  es

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} \right)$$

La suma situada entre el paréntesis es la suma de una progresión geométrica de razón  $\frac{2}{3}$  por lo que es igual a  $\frac{(\frac{2}{3})^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1}$  y como  $\frac{2}{3} < 1$  si hacemos la suma de *todos* los segmentos quitados (hacer que  $n$  tienda a infinito) se tiene que la suma de la progresión geométrica es

$$\frac{0 - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 3$$

por lo que la suma de *todos* segmentos quitados es  $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ . □

**Corollary 3.** *El conjunto de Cantor no tiene intervalos (se dice infinitamente poroso).*

**Proposition 4.** *El conjunto de Cantor es no vacío y es cerrado.*

*Demostración.* En el conjunto de Cantor siempre están al menos los extremos de los intervalos cerrados con los que nos quedamos en cada paso. Además es cerrado pues se forma por la intersección de intervalos cerrados. □

**Proposition 5.** *El conjunto de Cantor es no numerable.*

*Demostración.* En el primer paso el intervalo que se quita es  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . En base ternaria se tiene que  $\frac{1}{3} = 1 \cdot 3^{-1} = 0,1_3 = 0,0222\dots_3$  y  $\frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1} = 0,2_3$  por lo que el intervalo eliminado en base ternaria es  $(0,1_3, 0,2_3)$ , es decir, hemos eliminado sólo los números cuya representación ternaria es de la forma  $0,1\dots_3$ . Repitiendo este proceso observamos que en el paso  $n$  quitamos sólo los números cuya representación ternaria es de la forma  $0,a_1a_2\dots a_{n-1}1\dots_3$  con  $a_i = 0$  o  $2$ ,  $i = 1 \dots n - 1$ . Por tanto el conjunto de Cantor sólo posee números ternarios decimales con 0 y 2 y recíprocamente los números de esta forma pertenecen todos al conjunto de Cantor.

Por último si el conjunto de Cantor es numerable podemos escribirlos todos en forma de lista:

$$\begin{aligned} a^1 &= 0, a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 \dots \\ a^2 &= 0, a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \dots \\ a^3 &= 0, a_1^3 a_2^3 \dots a_n^3 \dots \end{aligned}$$

Entonces podemos formar otro número de la forma  $b = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$  con el criterio siguiente:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n = 2 \\ 2 & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

por tanto este número no está en la lista pero es un número del conjunto de Cantor. Así que efectivamente no es numerable.  $\square$

**Corollary 6.** *El conjunto de Cantor está en biyección con el intervalo  $[0, 1]$ .*

*Demostración.* Todos los números del intervalo  $[0, 1]$  escritos en base dos son de la forma  $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  con  $a_i = 0 \text{ o } 1$  (notar que  $1 = 0, 111\dots$ ). Además cualquier número de este tipo pertenece al intervalo  $[0, 1]$ .

Por tanto la biyección se construye así: a cada número escrito con sólo ceros y unos del conjunto de Cantor se le hace corresponder el número en base dos obtenido reemplazando todos sus unos por ceros. Por ejemplo,  $0,2002$  en base tres (que vale  $2/3 + 2/81 = 56/81$ ) tiene como imagen  $0,1001$  en base dos (que vale  $1/2 + 1/16 = 9/16$ ).  $\square$

**Proposition 7.** *El conjunto de Cantor es la imagen por si mismo de la unión de dos semejanzas de razón (factor de dilatación)  $1/3$ .*

*Demostración.* Basta observar que de un paso al siguiente obtenemos dos copias del paso anterior pero reducidas por un factor de  $1/3$ .  $\square$

A pesar de las extrañas propiedades del conjunto de Cantor es posible realizar una imagen tridimensional con papel como ves en la figura 2.2. Una descripción visual de cómo hacerla puedes encontrarla en <http://www.youtube.com/watch?v=5dOtaM0QYKo>

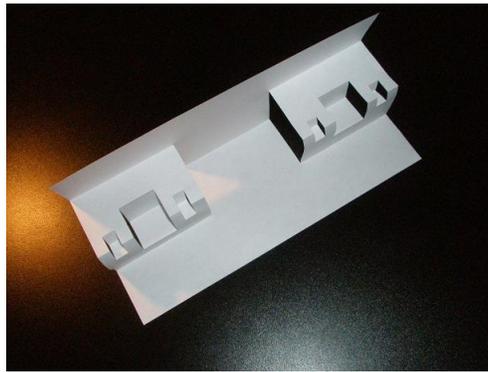


FIGURA 2.2. Conjunto de Cantor con papel y tijeras.

**2.2. Curva de Koch<sup>6</sup>.** El creador en 1904 de este monstruo fue Niels Fabian Helge von Koch, matemático sueco (1870). Su construcción es como sigue: En el primer paso se toma el segmento  $[0, 1]$ , se divide en tres partes iguales y se reemplaza la parte central por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de

<sup>6</sup>Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 1870 - Estocolmo 1924) fue un matemático sueco. Escribió multitud de artículos sobre teoría de números. Uno de sus resultados (1901) fue el teorema que probaba que la hipótesis de Riemann es equivalente al Teorema de los números primos.

60 grados. En el segundo paso con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera con cada uno de los segmentos, lo que da 16 segmentos pequeños. Y así se continua indefinidamente. La figura 2.3 representa las cuatro primeras etapas de la construcción.

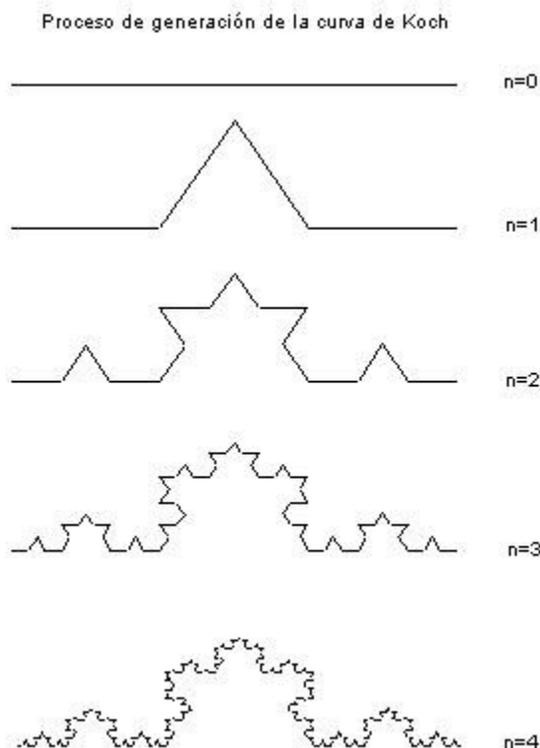


FIGURA 2.3. Curva de Koch.

En la figura 2.4 podemos ver una construcción a partir de la curva de Koch llamada *copo de Koch* en la que partimos de un triángulo equilátero.

**Exercise 8.** Según la descripción realizada para la curva de Koch completa la siguiente tabla:

Paso	0	1	2	4	5	...	$n$
Número de segmentos	1	4	16			...	
Longitud de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$			...	
Longitud de la figura	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$			...	

Según la tabla, cuando  $n$  tiende a infinito, la longitud de la curva tiende a ..... mientras que el área es .....

Otra propiedad de esta curva:

**Proposition 9.** *La curva de Koch es infinitamente quebrada, es decir, es una curva continua en todos sus puntos pero no derivable en ninguno.*

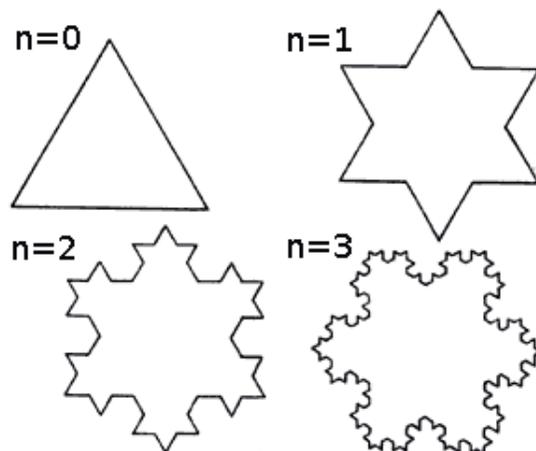


FIGURA 2.4. Copo de Koch.

*Demostración.* Para ser derivable en un punto debería haber un segmento de la curva de longitud no nula conteniendo al punto pero la longitud de los segmentos en el paso  $n$ -ésimo es de  $\frac{1}{3^n}$  que al tender al infinito hace que su longitud sea 0.  $\square$

Este es un claro ejemplo de porqué Benoit Mandelbrot estuvo acertado al escoger el nombre **fractal** para estas criaturas geométricas. La palabra latina **fractus** significa **quebrado**.

**Proposition 10.** *La curva de Koch es la imagen por si misma de la unión de cuatro semejanzas de razón  $1/3$ .*

*Demostración.* Basta observar que de un paso al siguiente obtenemos cuatro copias del paso anterior pero reducidas por un factor de  $1/3$ .  $\square$

**2.3. Triángulo de Sierpinski**<sup>7</sup>. El matemático Sierpinski introdujo este fractal en 1919 y diseñó este monstruo para demostrar, entre otras cosas, que era posible construir una curva que se "cruzaba" consigo misma en todos sus puntos.

Partamos (paso  $n = 1$ ) de la superficie de un triángulo equilátero de lado unidad. Seguidamente (paso  $n = 2$ ) tomemos los puntos medios de cada lado y construyamos a partir de ellos un triángulo equilátero invertido de lado  $\frac{1}{2}$ . Lo recortamos. Ahora (paso  $n = 3$ ) repetimos el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado  $\frac{1}{2}$  que nos quedan. Así que recortamos, esta vez, tres triángulos invertidos de lado  $\frac{1}{4}$ . En la figura observamos las seis primeras iteraciones. Si repetimos infinitamente el proceso obtendremos la figura 2.5, fractal denominado triángulo de Sierpinski.

<sup>7</sup>Wacław Franciszek Sierpinski (1882, Varsovia - 1969, Varsovia) fue un matemático polaco. Son notables sus aportaciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. En la teoría de conjuntos realizó importantes contribuciones para el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado. Tres conocidos fractales llevan su nombre: el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Sierpinski. También los números de Sierpinski en teoría de números han sido nombrados así en su honor.

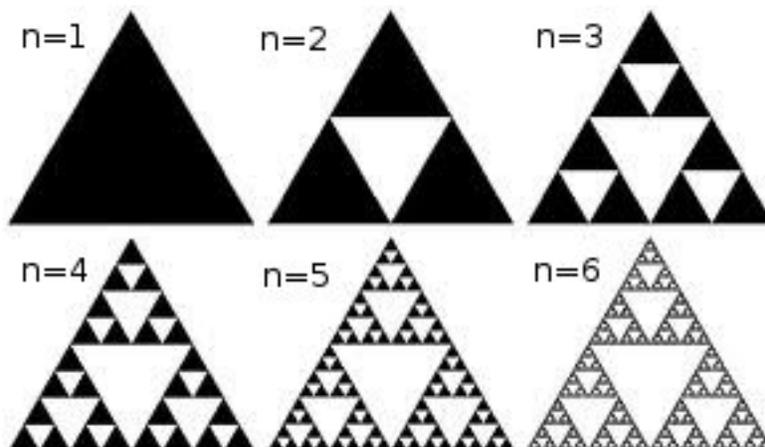


FIGURA 2.5. Triángulo de Sierpinski.

**Exercise 11.** Según la descripción realizada para la curva de Koch completa la siguiente tabla:

Paso	1	2	3	4	5	...	$n$
Número de triángulos	1	3				...	
Longitud de un lado	1	$\frac{1}{2}$				...	
Longitud de la figura	3	$9 \cdot \frac{1}{2}$				...	
Área de la figura	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot \frac{A}{4}$					
Número de vértices	3	$3+3=6$					

Según la tabla la longitud de la curva tiende a ..... mientras que el área tiende a .....

**Proposition 12.** *El triángulo de Sierpinski es la imagen por si mismo de la unión de tres semejanzas de razón 1/2.*

Es posible realizar una versión tridimensional del triángulo de Sierpinski en papel tal y como se muestra en la figura 2.6. Una descripción visual de cómo hacerla puedes encontrarla en <http://www.youtube.com/watch?v=aepxB7Y-0UA>.

Además es posible realizarlo con diversos materiales como muestra la figura 2.7 utilizando latas.

### 3. AUTOSEMEJANZA

Una de las características de los objetos fractales que hemos estudiado es la *auto semejanza*, esto quiere decir que el aspecto es el mismo independientemente de la escala en que lo observemos. Por ejemplo cuando se consideran fractales naturales como un árbol, el tronco se divide en ramas, que a su vez se dividen en ramas más pequeñas, de las que salen hojas, que tienen nervaduras, que a su vez se subdividen, etcétera. Mirando una rama tenemos la misma impresión que mirando todo el árbol o una hoja. Vamos a expresar esta realidad de la naturaleza de forma precisa.



FIGURA 2.6. Triángulo de Sierpinski



FIGURA 2.7. Triángulo de Sierpinski con latas.

Recordemos que una semejanza es una transformación que conserva la forma y las proporciones, pero que puede variar el tamaño, la posición y la orientación.

**Proposition 13.** *Una semejanza de razón  $s$  multiplica longitudes (unidades de medida unidimensionales) por  $s$ , superficies (unidades de medida bidimensionales) por  $s^2$ , volúmenes (unidades de medida tridimensionales) por  $s^3$  y, en general, unidades de medida  $d$ -dimensionales por  $s^d$ .*

Hemos visto que los fractales conjunto de Cantor, curva de Koch y triángulo de Sierpinski se obtienen como la unión de un número finito de semejanzas. Por

tanto son conjuntos autosemejantes. Pero también son autosemejantes conjuntos tan simples como:

- El segmento  $[0, 1]$  ya que por ejemplo es la unión de dos semejanzas de razón  $\frac{1}{2}$ .



FIGURA 3.1. Segmento autosemejante.

- El cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  ya es la unión de cuatro semejanzas de razón  $\frac{1}{2}$ .

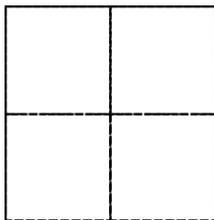


FIGURA 3.2. Cuadrado autosemejante.

- El cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  ya que por ejemplo es la unión de ocho semejanzas de razón  $\frac{1}{2}$ .

Mientras que los tres primeros son fractales en el sentido de Manderbrot, es decir, son quebrados infinitamente, los tres restantes no lo son en este sentido. Entonces, ¿qué hay que imponer para que un objeto geométrico sea fractal? El secreto está en la dimensión.

#### 4. DIMENSIÓN

Tenemos una concepción intuitiva de las dimensiones de los objetos geométricos sencillos: un punto no tiene dimensión, un segmento tiene una, un cuadrado dos y un cubo tres. Pero ¿es correcta esta concepción? Su cálculo resulta muy sencillo a partir de la proposición 13. Veámoslo:

- Para el segmento  $[0, 1]$  al ser autosemejante tenemos que

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1 \iff 2 = 2^d \iff d = 1.$$

Luego efectivamente la dimensión de segmento es 1.

- Para el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  al ser autosemejante tenemos que

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1 \iff 4 = 2^d \iff d = 2.$$

Luego efectivamente la dimensión de un cuadrado es 2.

- Para el cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  al ser autosemejante tenemos que

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1 \iff 8 = 2^d \iff d = 3.$$

Luego efectivamente la dimensión de un cubo es 3.

Con esta técnica vamos a estudiar qué dimensión tienen objetos geométricos ya vistos con anterioridad.

**4.1. El conjunto de Cantor.** De las propiedades vistas con anterioridad deducimos que el conjunto de Cantor no puede tener dimensión cero pues por el Corolario 6 es biyectivo con  $[0, 1]$ . Pero tampoco puede tener dimensión 1 pues es infinitamente poroso por el Corolario 3. ¿Qué dimensión  $d$  tiene entonces el conjunto de Cantor? El método para calcularlo nos lo da la propiedad de ser autosemejante dada por la proposición 7 ya que si tomamos la unidad como medida del conjunto de Cantor  $d$ -dimensional se tiene que  $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1 \Rightarrow 2 = 3^d \Rightarrow d = \log(2)/\log(3) \cong 0,63$ . Por tanto su dimensión es fraccionaria estando más cerca de ser 1 que de 0.

**4.2. La curva de Koch.** La curva de Koch no puede tener dimensión 1 pues su longitud es infinita en un área finita como hemos deducido en el Ejercicio 8. Pero tampoco puede tener dimensión dos pues es una curva. Entonces, ¿qué dimensión  $d$  tiene? De nuevo la solución la da la propiedad de ser autosemejante obtenida en la proposición 10. Si tomamos como la unidad a la  $d$ -dimensión de la curva de Koch se tiene que  $4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1 \Rightarrow 4 = 3^d \Rightarrow d = \log(4)/\log(3) \cong 1,26$ . Por tanto, de nuevo, su dimensión es fraccionaria estando más cerca de ser 1 que 2.

**4.3. El triángulo de Sierpinski.** Si tomamos como la unidad a la  $d$ -dimensión del triángulo de Sierpinski se tiene que  $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1 \Rightarrow 3 = 2^d \Rightarrow d = \log(3)/\log(2) \cong 1,58$ . Por tanto, de nuevo, su dimensión es fraccionaria estando más cerca de ser 2 que 1.

## 5. OTROS OBJETOS FRACTALES.

Como hemos visto nuestros objetos fractales se diferencian de los objetos geométricos clásicos (euclídeos) en que tienen una dimensión no entera. Para el cálculo de su dimensión hemos utilizado la propiedad de que estos objetos eran autosemejantes pero no todos los objetos de naturaleza fractal son autosemejantes. Podemos encontrar también objetos con:

- **Cuasiautosemejanza.** Exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Ejemplo los **conjuntos de Mandelbrot** que se definen mediante sucesiones. En la figura 5.1 se muestra este fractal.

En el enlace [http://www.youtube.com/watch?v=G\\_GBwuYuOosse](http://www.youtube.com/watch?v=G_GBwuYuOosse) muestra un vídeo sobre este fractal.

- **Autosemejanza estadística.** Es el tipo más débil de autosimilitud. Se exige que el fractal tenga *medidas numéricas o estadísticas* que se preserven con el cambio de escala. Los *fractales aleatorios* son ejemplos de fractales de este tipo. Estos se utilizan, por ejemplo, en la simulación de los efectos de la erosión en paisajes generados por ordenador (ver figura 5.2) siendo de gran utilidad en la industria del Cine. Se utilizaron por vez primera en Star Trek: La ira de Khan, en la representación del planeta Génesis. Luego en

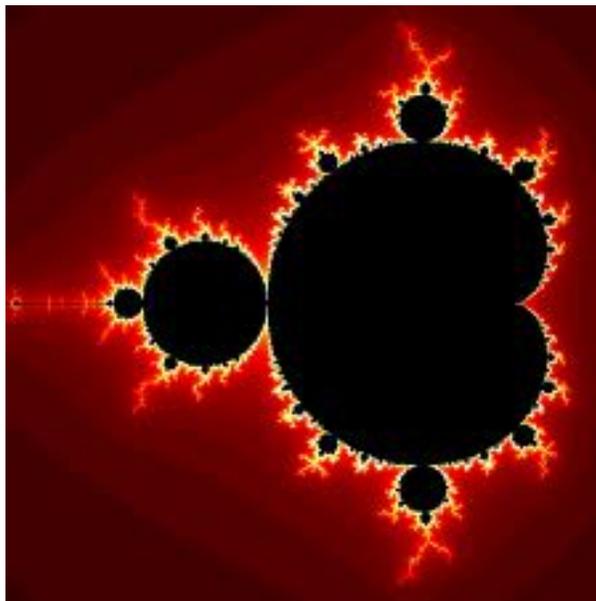


FIGURA 5.1. Conjunto de Mandelbrot.

películas como en La Guerra de las Galaxias, El Señor de los Anillos, etc.



FIGURA 5.2. Paisaje fractal.

Otro ejemplo es el del **movimiento browniano** que es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo polen en recipiente con agua, figura 5.3 ).

**5.1. Dimensión fractal.** Cuando un objeto no tiene autosemejanza, ¿cómo calcular su dimensión fractal?. La dimensión fractal que definimos en este apartado es la base para la determinación experimental de la dimensión de objetos que no son autosemejantes. Se puede aplicar al cálculo de fractales tales como nubes, líneas de costa, contornos de poblaciones, agrupaciones de bacterias, etcétera. Vamos a mostrar como se hace en el caso de curvas fractales.

Para determinar la dimensión fractal de una curva preparamos una serie de cuadrículas (ver figura 5.4)  $R_k$  cada vez más finas, de forma que el lado de la  $k$ -ésima sea la mitad del lado de la anterior. Superponemos la cuadrícula sobre la curva y calculamos  $N(k) =$  “número de cuadrados de  $R_k$  que cortan a la curva”.



FIGURA 5.3. Movimiento browniano.

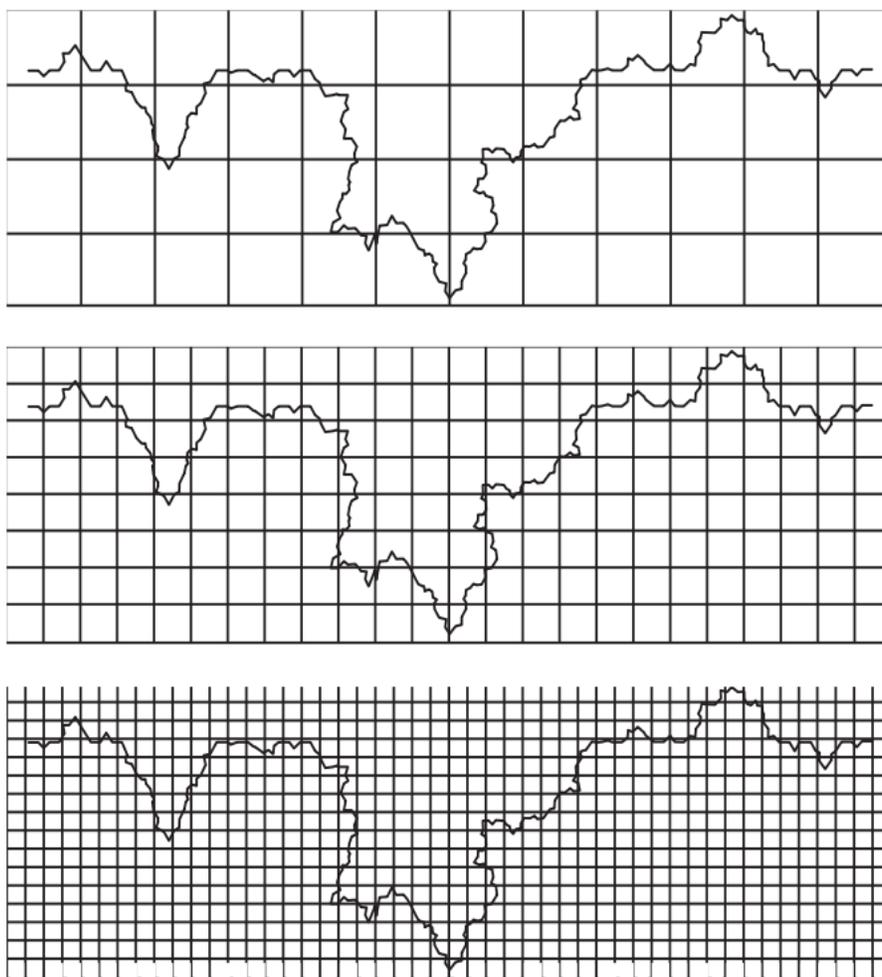


FIGURA 5.4. Cuadrículas para el cálculo de la dimensión fractal.

Si la curva fuese un segmento rectilíneo, es claro que entonces  $N(k)$  sería proporcional a  $2^k$ : al reducir a la mitad el lado de la cuadrícula, se duplica el número de cuadrados que lo cortan. Pero si la curva se “retuerce” de forma que se repita

indefinidamente entonces  $N(k)$  ya no sería proporcional a  $2^k$  sino a cierto  $2^{D \cdot k}$ . Ese exponente  $D$  es lo que se define como **dimensión fractal**.

En la práctica para saber si hay dicha relación representamos en un eje de coordenadas los valores  $\log N(k)$  (ordenadas) y  $\log(2^k)$  (abcisas) para un rango de  $k$ 's adecuado al objeto que se examina o que la tecnología usada nos permita. Si la nube de puntos se encuentra aproximadamente sobre una recta esto nos indica que el objeto estudiado tiene algún tipo de autosemejanza de los ya estudiados con anterioridad. Calculamos la recta que mejor se ajusta a estos puntos

$$\log N(k) = D \cdot \log(2^k) + C$$

El valor del pendiente  $D$  es la dimensión fractal del objeto estudiado.

**Proposition 14.** *Si el objeto estudiado es atosemejante entonces su dimensión  $d$  calculada como objeto autosemejante es igual a su dimensión fractal  $D$ .*

**5.2. Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una población.** El contorno de una población se puede considerar como un tipo de fractal aleatorio. La morfología de una ciudad es el resultado de una multitud de procesos físicos y sociales. Estos incluyen la tecnología de la construcción, patrones de tenencia de la tierra, el tamaño de los terrenos con construcciones, la demanda de espacios residenciales, la movilidad de la población y la eficiencia y disponibilidad de la tecnología de los transportes.

Todos estos procesos se manifiestan a diferentes escalas, por ejemplo, las tecnologías de construcción se manifiestan a escalas relativamente pequeñas, y las de transporte a escalas mayores. Se puede concluir que esos procesos se reflejan en el contorno de una población, y por tanto en su irregularidad y dimensión fractal.

Con el objetivo de calcular la rugosidad del contorno de una población considerado como fractal aleatorio vamos a utilizar la técnica del conteo de cuadrículas mediante el programa libre *Fractalysse* desarrollado por el Research centre Théna (CNRS-Université de France-Comté) y que se puede descargar gratuitamente desde la página <http://www.fractalysse.org/en-home.html>.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Obtener una imagen por satélite de la localidad a la menor escala en que se pueda ver su contorno. Para ello se pueden usar los programas gratuitos Google Maps o Google Earth.
2. Utilizar un programa de dibujo que permita utilizar capas para seleccionar el contorno de la localidad y quedarnos únicamente con dicho contorno y pasar la imagen a formato bmp. Podemos usar el programa libre Gimp.
3. Ejecutar el programa libre Fractalysse y cargar la imagen bmp obtenida y seleccionar "Analyse/Box" y en el menú emergente el tamaño de caja como exponencial y el algoritmo tipo rejilla. Obtendremos entre otros datos la dimensión fractal denotada como *dim*.

#### REFERENCIAS

- [1] M. de Guzman y otros. *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Ed. Labor.
- [2] B. Mandelbrot. *Los objetos fractales*. Ed. Busquets.
- [3] J. Comas y M.J. Herrera. *Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria*. Revista Suma nº 65.