PROBLEMAS OLÍMPICOS II

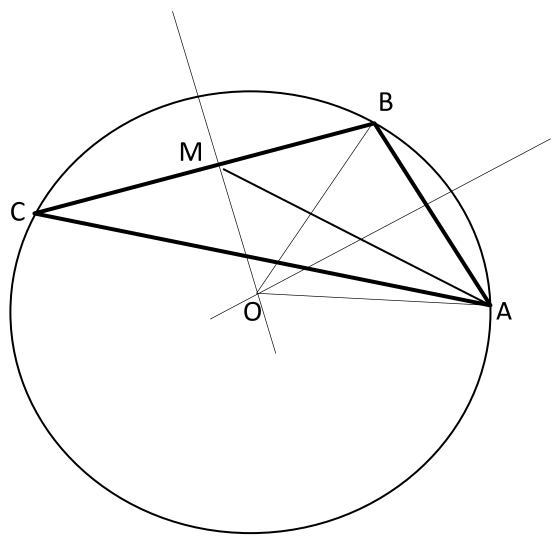
Eva Elduque Laburta
Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza

1. Sean a, b, c números reales no nulos y distintos. Probar que si las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ca = 0$ tienen una raíz común, entonces las restantes raíces verifican la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$. (Fase local 2005)

Solución: Llamemos a la raíz común d, y a las no comunes e y f. Si $(x-d)$ divide a $x^2 + ax + bc$ y a $x^2 + bx + ca$, también divide a $(a-b)x – (a-b)c$, que es la resta de los dos polinomios. Entonces, $c=d$. $(x-d) \cdot (x-e) = x^2 + ax + bc$ implica que $a= -d -e = -c -e$, $bc= de = ce$; por lo que $b=e$. Análogamente, tenemos que $a=f$, luego efectivamente $x^2 + cx + ab=(x-e) \cdot (x-f)$, ya que $c= -e –f$ $(a=f= -c –e)$; y $ab=ef$ $(a=f, b=e)$.

2. Se considera un triángulo ABC con $\angle BAC = 45º$ y $\angle ACB = 30º$. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45º$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$. (Fase local 2005)

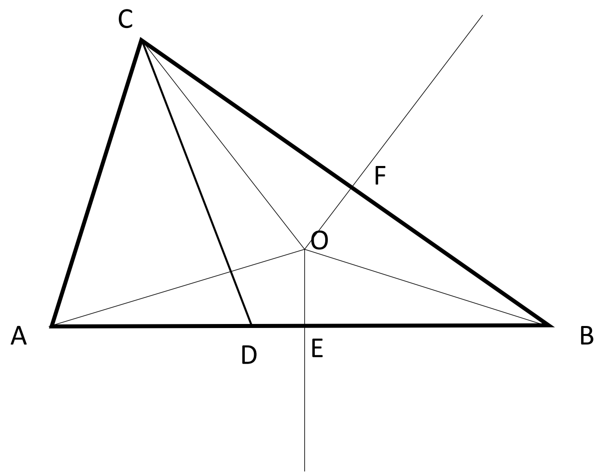
Solución:



Trazamos las mediatrices de CB y BA. Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en el circuncentro, que hemos llamado O, y que equidista de los tres vértices. El ángulo $\angle BCA$ es la mitad del $\angle BOA$ (por estar $\angle BCA$ inscrito en una circunferencia), luego $\angle BOA$= 60º. Como OA=OB, los ángulos $\angle OAB$ y $\angle OBA$ son iguales (60º también) y el triángulo OAB es equilátero. Nos fijamos ahora en el cuadrilátero $BMOA$. Sabemos que el ángulo $\angle MBA$= 105º, $\angle BAO$= 60º, $\angle BMO$= 90º, luego $\angle MOA$= 105º (los ángulos de un cuadrilátero suman 360º). Como BA=OA por ser OAB equilátero, y los ángulos $\angle MOA$ y $\angle MBA$ son iguales, los triángulos *MBA* y *MOA* son iguales (comparten el lado *MA*). Entonces los ángulos ∠*AMB* y ∠*OMA* son iguales, y como su suma es 90º, tenemos que ∠*AMB*= 45º, que es lo que se quería probar. Para la segunda parte del problema, sabemos que 2*MB*=*CB*, luego hay que probar que 2*MB*·*AC*=2*AM*·*AB*, o lo que es lo mismo, *MB*/*AB*=*AM*/*AC*; y esto último es verdad porque los triángulos *BMA* y *ABC* son semejantes por tener los ángulos iguales.

3. En el triángulo *ABC* se traza la bisectriz interior *CD*. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo *BCD* coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo *ABC*. Calcular los ángulos del triángulo *ABC*. (Fase local 2006)

   Solución:



Llamemos *O* al incentro de *BCD* y circuncentro de *ABC*, *E* al punto medio de *AB*, y *F* al punto medio de *BC*. *CO* es la bisectriz de ∠*DCB*, *BO* es la bisectriz de ∠*ABC*, *OE* es la mediatriz de *AB*, *OF* es la mediatriz de *BC*. Los triángulos *OEB*, *OBF*, *OFC*, y *AEO* son iguales (ya que *OE*=*OF* por ser *O* el incentro de *BCD, OA*=*OB*=*OC* por ser O circuncentro de *ABC*; y son rectángulos) por lo que los ángulos ∠*EBO,* ∠*OBF,* ∠*FCO* y ∠*OAE* son iguales, (llamaremos a estos ángulos α). También ∠*DCO* es α por ser *CO* la bisectriz de ∠*DCB*. Tenemos que el triángulo *AOC* es isósceles (los ángulos ∠*ACO* y ∠*CAO* son iguales, por ser *OA*=*OC*), y que el ángulo ∠*ACD*=2α (por ser *CD* la bisectriz de ∠*ACB*), luego los ángulos ∠*ACO* y ∠*CAO*=3α. Tenemos pues que ∠*ABC*= 2α, ∠*BCA*= 4α, ∠*CAB*= 4α, y sabemos que 2α+4α+4α=10α=180º, por lo que α=18º. Así el triángulo *ABC* tiene dos ángulos de 72º (∠*BCA* y ∠*CAB*= 4α) y uno de 36º (∠*ABC*= 2α).

4. Halla todos los pares de números naturales *x, y* (*x* < *y*) tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999. (Fase local 1999. Es bastante común que pongan un problema relacionado con el año.)

Solución: Hay que sumar los números que van de x+1 a y-1. Si llamamos a estos números a_1, $a_2, \ldots a_n$ (hay n números, $a_1=x+1$, $a_n=y-1$). La suma

$$\begin{array}{r} a_1+a_2+\ldots+a_n \\ +\ \ a_n+\ldots+a_2+a_1 \end{array}$$

da n veces $a_1+a_n=((x+1)+(y-1))=x+y$, luego $n\cdot(x+y)=2\cdot 1999$.

Como 1999 es primo, n sólo puede ser 1, 2, ó 1999.

1999 no puede ser, porque entonces x+y valdría 2 y no hay dos números naturales distintos cuya suma sea 2, y aunque considerásemos el 0 como natural, y tuviésemos x=0, y=2, no hay 1999 números entre esos dos.

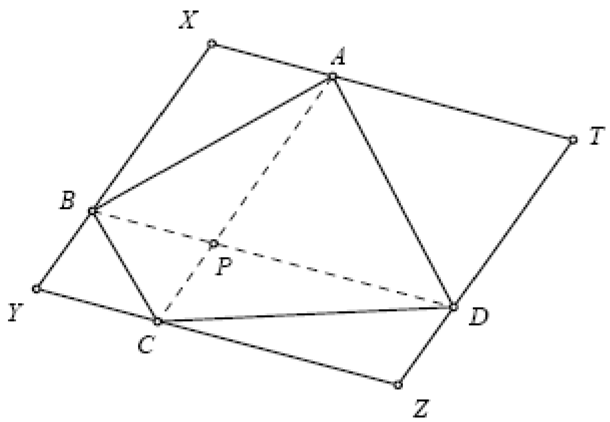
Si n=2, x+y= 1999, x+3=y (porque hay n=2 números entre x e y); luego x=998, y=1001.

Si n=1, x+1= 1999 · 2= 3998, x+2=y; luego x=1998, y =2000.

Los pares x=998, y=1001; x=1998, y=2000 son las únicas soluciones.

5. Un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área. Demuestra que este cuadrilátero es un paralelogramo. (Fase local 2008)

Solución: Si se trazan las paralelas a las diagonales por los vértices, obtenemos un paralelogramo (*XYZT*) de área el doble que *ABCD*.



Si *AC* biseca a *ABCD*, entonces tiene que bisecar a *XYZT*, porque el paralelogramo *XYCA* tiene el doble de área que el triángulo *ABC*, y análogamente *TACZ* tiene el doble de área que *ACD*. Entonces *P* tendría que ser el punto medio de *BD*. De igual modo, si *BD* biseca a *XYZT*, *P* tendría que ser el punto medio de *CA*. Los triángulos *PBC* y *APD* tienen pues dos lados iguales y el mismo ángulo comprendido entre ellos, luego son iguales y *BC* es paralelo a *AD*. Análogamente, los triángulos *PCD* y *PAB* son iguales, y *AB* es paralelo a *CD*.

6. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30. (Fase local 2008)

   Solución: Vamos a hacerlo por reducción al absurdo, demostrando que no puede haber 31 comités. Si hubiera 31, habría $31 \cdot 5 = 155$ plazas en total, para 25 personas. Si dividimos 155 entre 25 nos da cociente 6 y resto 5, lo que significa que hay personas que están en 7 comités al menos. Como en 7 comités hay 35 plazas, si una persona sola (llamémosla A) ocupa al menos 7 de ellas, quedan como mucho 28 plazas libres y 24 personas para ocuparlas. Entonces, como el cociente de 28 entre 24 es 1, con resto 4, la persona B que más asientos ocupa de esos 24 restantes ocupa 2 asientos al menos. Por tanto A y B coinciden en al menos 2 comités, obteniendo así una contradicción con el enunciado.