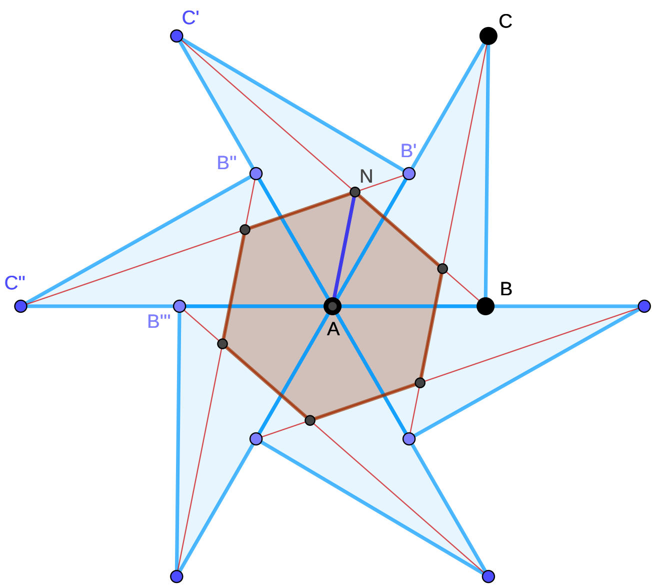
Fase aragonesa de la LVIII Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (14 de enero de 2022)

1. Consideramos un triángulo ABC rectángulo en B, tal que su cateto AB está apoyado en el eje de abscisas. El triángulo es tal que al girarlo dos veces un ángulo $\widehat{A}$ con respecto al vértice A, como se observa en la figura, la hipotenusa cae sobre el eje de abscisas. Considera la construcción del punto N que se observa en la figura y calcula numéricamente la razón entre los segmentos $\overline{B'C}$ y $\overline{AN}$. Calcula también el cociente entre las áreas de la figura estrellada (toda la figura coloreada) y del hexágono interior (en color oscuro).



Solución: Tomamos el punto A como origen de coordenadas y la longitud del segmento $\overline{AB}$ como unidad de longitud. De este modo tenemos (identificando los puntos con sus coordenadas) $A = (0,0)$, $B = (1,0)$. Las condiciones del problema nos dicen que el ángulo en A es de 60°, luego $C = (1, \sqrt{3})$. Notemos que la longitud de $\overline{AC}$ es 2, y la de $\overline{B'C}$ es 1.

Ahora es fácil calcular las coordenadas de varios puntos: $B' = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C' = (-1, \sqrt{3})$, $C'' = (-2, 0)$.

La recta que une B' y C tiene como ecuación

$$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{x-1}{-2}, \quad \text{esto es,} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1),$$

y la que une C'' y B' es

$$\frac{y}{\sqrt{3}/2} = \frac{x+2}{1/2+2}, \quad \text{esto es,} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x+2).$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones obtenemos las coordenadas del punto $N = (\frac{1}{7}, \frac{3\sqrt{3}}{7})$. Así, la longitud del segmento $\overline{AN}$ es $\frac{1}{7}\sqrt{1+27} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Por tanto el cociente entre las longitudes de los segmentos $\overline{B'C}$ y $\overline{AN}$ es $\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$.

El área de la figura estrellada es 6 veces el área del triángulo ABC, mientras que el área del hexágono es 6 veces el área del triángulo equilátero de lado $\frac{2}{\sqrt{7}}$. Como el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{1}{2}l(\frac{\sqrt{3}}{2}l) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, obtenemos

$$\frac{\text{área estrella}}{\text{área hexágono}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}.$$

2. Sea n un número mayor o igual que 3. Consideramos n números enteros positivos (no necesariamente distintos) dispuestos en un círculo formando un corro. Decimos que tres números son vecinos en el corro si se encuentran en tres posiciones consecutivas sin otros números en medio. Dado un corro de este tipo formado con n números, decimos que es un n-corro si el producto de tres vecinos cualesquiera es siempre n. Determina razonadamente el número de enteros n entre 3 y 2022 para los que existe un n-corro.

Solución: Fijamos un punto del corro y llamamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a los números del corro recorridos en sentido horario. La condición de ser n-corro es:

(*) $$a_1a_2a_3 = a_2a_3a_4 = a_3a_4a_5 = \cdots = a_{n-2}a_{n-1}a_n = a_{n-1}a_na_1 = a_na_1a_2 = n.$$

De la primera igualdad obtenemos $a_1 = a_4$ y, análogamente, $a_1 = a_4 = a_7 = \cdots$.
De la segunda igualdad obtenemos $a_2 = a_5$ y, análogamente, $a_2 = a_5 = a_8 = \cdots$.
De la tercera igualdad obtenemos $a_3 = a_6$ y, análogamente, $a_3 = a_6 = a_9 = \cdots$.

Si n es múltiplo de 3, entonces podemos construir fácilmente un n-corro con números

$$1, 1, n, 1, 1, n, 1, 1, n, \ldots$$

Entre 3 y 2022 hay $\frac{2022}{3} = \mathbf{674}$ múltiplos de 3.

Si n es un múltiplo de 3 más 1: $n = 3k + 1$, entonces $a_1 = a_4 = \cdots = a_{3k+1} (= a_n)$, y $a_3 = a_6 = \cdots = a_{3k}$. Las últimas igualdades en (*) nos dan $a_{3k}a_{3k+1}a_1 = a_{3k+1}a_1a_2 = a_1a_2a_3 = n$. Esto es, $a_3a_1^2 = a_1^2a_2 = a_1a_2a_3 = n$, que nos dan $a_1 = a_2 = a_3$ y $n = a_1^3$. Por tanto, n ha de ser un cubo perfecto, y todos los números del corro tienen que ser iguales a la raíz cúbica de n.

Un razonamiento análogo nos dice que pasa lo mismo si n es de la forma $3k + 2$. Así pues, además de los enteros n que son múltiplos de 3, solamente existen n-corros para los enteros n que son cubos perfectos no múltiplos de 3. Como $12^3 < 2022 < 13^3$, a los múltiplos de 3 hay que añadir lo siguientes **7** valores de n: $2^3, 4^3, 5^3, 7^3, 8^3, 10^3, 11^3$.

Por tanto, el número pedido es $674 + 7 = \mathbf{681}$.