Universidad de Zaragoza
Glenier Bello (gbello@unizar.es)

Preparación Olímpica IV

Soluciones

Problema 1. Sea n un entero positivo. ¿De cuántas maneras se puede escribir n como suma de (al menos dos) enteros positivos? Consideramos que el mismo conjunto de enteros escritos en orden distinto se cuenta como sumas distintas. Por ejemplo, el 3 se puede escribir de 3 formas distintas: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

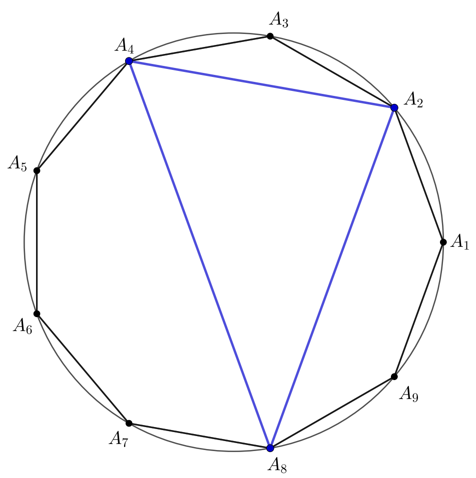
Solución. Consideremos n números 1 escritos en fila. Entre cada par de números 1 seguidos, decidimos si ponemos una barra que los separe o no. En total tenemos 2^{n-1} posibilidades. Excluyendo el caso en el que no ponemos ninguna barra separadora, tenemos un total de $2^{n-1} - 1$ posibilidades. Notar que cada elección de este estilo determina unívocamente una suma (ordenada) que da como resultado n, sin más que determinar cuántos unos quedan en cada bloque separado por barras. Por ejemplo, para $n = 7$, la suma $7 = 2 + 3 + 1 + 1$ viene determinada por

$$1\,1\,|\,1\,1\,1\,|\,1\,|\,1\,.$$

De esta forma, hemos obtenido que hay un total de $2^{n-1} - 1$ maneras distintas de escribir n como suma de (al menos dos) enteros positivos. $\square$

Problema 2. Cada uno de los vértices de un polígono regular de 9 lados se colorea de rojo o de azul. Probar que existen dos triángulos congruentes monocromáticos (es decir, triángulos cuyos vértices son todos del mismo color).

Solución. Por el principio del palomar, existen al menos 5 vértices del mismo color; por ejemplo, de color azul. De esta forma, hay al menos $\binom{5}{3} = 10$ triángulos de color azul. Cada uno de estos triángulo se puede identificar con una terna de enteros positivos (a, b, c) tales que $a \leq b \leq c$ y $a + b + c = 9$: el número de aristas del polígono que hay en cada uno de los tres arcos determinados por los vértices del triángulo. Por ejemplo, el triángulo de la siguiente figura se identifica con la terna $(2, 3, 4)$:



El número total de tales ternas es 7: $(1,1,7),(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,4)$. Por tanto, de nuevo el principio del palomar, a al menos dos triángulos monocromáticos azules les corresponde la misma terna, lo que significa que son triángulos congruentes. $\square$

Problema 3. Una ciudad de forma rectangular tiene $x+1$ calles paralelas en dirección norte–sur e $y+1$ calles paralelas en dirección este–oeste. ¿De cuántas formas puede llegar un taxi al extremo noreste partiendo del extremo suroeste si sólo viaja en las direcciones este y norte?

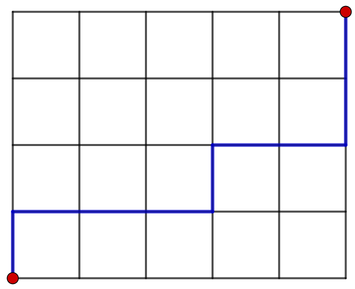


Figura 1: Ejemplo de un posible viaje en taxi, donde $x=5$ e $y=4$.

Solución. Cada recorrido en taxi se puede asociar de manera unívoca a una sucesión de tamaño $x+y$ compuesta por x letras E (dirección este) e y letras N (dirección norte). Por ejemplo, el recorrido de la figura de arriba corresponde a la sucesión (N,E,E,E,N,E,E,N,N). Luego en total hay $\binom{x+y}{x}$ posibles viajes en taxi. $\square$

Problema 4. Consideremos tres pilas de piedras con 19, 8 y 9 piedras, respectivamente. Podemos elegir dos pilas y pasar una piedra de cada una de esas pilas a la pila restante. Después de realizar varias de estas operaciones, ¿es posible conseguir que las tres pilas tengan 12 piedras cada una?

Solución. Trabajando módulo 3, vemos que el número inicial de piedras en las tres pilas es $(1,2,0)$. Además, en cada operación seguimos obteniendo la terna anterior variando solamente el orden. Por tanto, nunca llegaremos a obtener 12 piedras en cada pila, ya que esa situación se corresponde con la terna $(0,0,0)$ módulo 3. $\square$

Problema 5. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ números enteros tales que, si quitamos cualquiera de ellos, los restantes $2n$ números se pueden dividir en dos conjuntos de n enteros con igual suma. Probar que $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}$.

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2n+1}$. Notemos también que si sumamos (o restamos) la misma cantidad a cada número a_i, la nueva familia de $2n+1$ números sigue teniendo la propiedad del enunciado. Por tanto, también podemos suponer que $a_1 = 0$.

Sea m la cantidad de números impares del conjunto $\{a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}\}$. Si m fuese impar, entonces $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$ sería un número impar y en consecuencia $\{a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}\}$ no se podría dividir en dos conjuntos con la misma suma. Por tanto m es par. Supongamos que $m \geq 2$ y sea a_i uno de los números impares del conjunto $\{a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}\}$. Entonces el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{2n+1}\}$ (nuestro conjunto de partida quitando el número a_i) tendría un número impar de números impares: $m-1$. Igual que razonamos antes, deducimos que esa familia de números no se puede dividir en dos conjuntos de igual suma. Por tanto, $m = 0$; es decir, todos los números $a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ son pares.

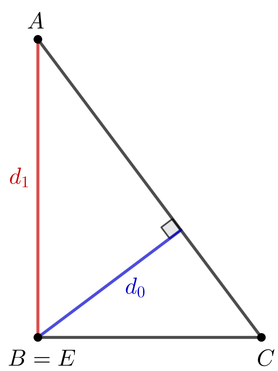
Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 2n{+}1\}$, sea $b_i := a_i/2$. Notar que los números $0 = b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{2n+1}$ siguen cumpliendo la propiedad del enunciado: si quitamos uno cualquiera de ellos podemos dividir los otros $2n$ números en dos conjuntos de n números de igual suma. Por el razonamiento anterior, deducimos de nuevo que todos los números b_i son pares. Este proceso (dividir por dos los números de las nuevas familias que vamos obteniendo) se puede iterar indefinidamente. Pero esto sólo es posible si $0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}$; es decir, nuestros números de partida tenían que ser todos iguales, como queríamos probar. $\square$

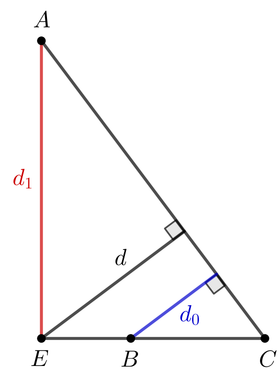
Problema 6. Consideremos $n \geq 3$ puntos en el plano con la siguiente propiedad: si una recta pasa por dos puntos cualesquiera, entonces pasa por un tercer punto del conjunto. Probar que todos los puntos iniciales están alineados.

Solución. (Este resultado se conoce como el **problema de Sylvester**). Probaremos un enunciado equivalente: si hay $n \geq 3$ puntos en el plano que no están alineados, entonces existe una recta que pasa por exactamente dos de los puntos.

Hay un número finito de rectas que se pueden formar por los puntos del conjunto inicial. Dada una de esas rectas, existe al menos un punto del conjunto que no pertenece a la recta. Consideramos entonces la distancia entre el punto y la recta. Finalmente, ordenamos todas esas posibles distancias: $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Es decir, d_1 es la menor distancia entre todos los posibles puntos y todas las posibles rectas. Digamos que d_1 es la distancia de un punto A del conjunto a una recta ℓ formada por otros dos puntos del conjunto. A continuación probaremos que la recta ℓ contiene exactamente dos puntos del conjunto.

Supongamos que, por el contrario, los puntos B, C y D del conjunto están en la recta ℓ. Desde A trazamos la recta AE perpendicular a ℓ, con el punto E en ℓ. Si E es uno de los puntos B, C o D, digamos $E = B$, tenemos que la distancia d_0 de B a la recta que pasa por AC es estrictamente menor que d_1, lo cual contradice la minimalidad de d_1, como se indica en la figura de la izquierda:





Por tanto, E no es ninguno de los puntos B, C o D. Por el principio del palomar, habrá dos puntos al mismo lado de la perpendicular AE, digamos B y C, como se indica en la figura de arriba a la derecha. Entonces, si d (respectivamente d_0) es la distancia de E (respectivamente B) a la recta que pasa por AC, tenemos que $d_1 > d > d_0$, llegando de nuevo a una contradicción con la minimalidad de d_1. Por tanto, la recta ℓ sólo tiene dos puntos del conjunto inicial de puntos. $\square$