Glenier Bello (gbello@unizar.es) 12 de diciembre de 2025

Preparación Olímpica IV

Enunciados

Problema 1. Sea n un entero positivo. ¿De cuántas maneras se puede escribir n como suma de (al menos dos) enteros positivos? Consideramos que el mismo conjunto de enteros escritos en orden distinto se cuenta como sumas distintas. Por ejemplo, el 3 se puede escribir de 3 formas distintas: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

Problema 2. Cada uno de los vértices de un polígono regular de 9 lados se colorea de rojo o de azul. Probar que existen dos triángulos congruentes monocromáticos (es decir, triángulos cuyos vértices son todos del mismo color).

Problema 3. Una ciudad de forma rectangular tiene $x + 1$ calles paralelas en dirección norte–sur e $y + 1$ calles paralelas en dirección este–oeste. ¿De cuántas formas puede llegar un taxi al extremo noreste partiendo del extremo suroeste si sólo viaja en las direcciones este y norte?

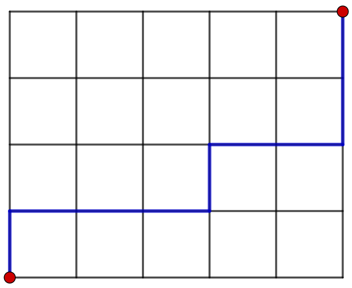

Figura 1: Ejemplo de un posible viaje en taxi, donde $x = 5$ e $y = 4$.

Problema 4. Consideremos tres pilas de piedras con 19, 8 y 9 piedras, respectivamente. Podemos elegir dos pilas y pasar una piedra de cada una de esas pilas a la pila restante. Después de realizar varias de estas operaciones, ¿es posible conseguir que las tres pilas tengan 12 piedras cada una?

Problema 5. Sean $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ números enteros tales que, si quitamos cualquiera de ellos, los restantes $2n$ números se pueden dividir en dos conjuntos de n enteros con igual suma. Probar que $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}$.

Problema 6. Consideremos $n \geq 3$ puntos en el plano con la siguiente propiedad: si una recta pasa por dos puntos cualesquiera, entonces pasa por un tercer punto del conjunto. Probar que todos los puntos iniciales están alineados.