

TALLER DE TALENTO MATEMÁTICO

OLIMPIADA MATEMÁTICA

PROBLEMAS FASE LOCAL Y NACIONAL 2004 Y FASE LOCAL 2007
M^a ESTHER GARCÍA GIMÉNEZ

Problema 1 (2004)

Encontrad todas las funciones $f: N \rightarrow N$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n .

Problema 2 (2004)

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden el mismo eje. Demostrad que el triángulo es acutángulo.

Problema 3 (2004)

Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados).

Problema 4 (2004)

Demostrad que si $-1 < x < 1, -1 < y < 1$,

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

Problema 5 (2004)

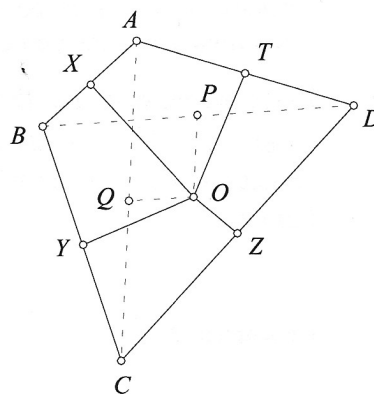
Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que, si a, b, c son las tres raíces de P , las de Q son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios P, Q .

Problema 6 (2004)

$ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O .

Si unimos O con las cuatro puntos medios de los lados X, Y, Z y T se forman cuatro cuadriláteros, $OXBY, OY CZ, OZDT$ y $OTAX$.

Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.



Problema 7 (2007)

Sea $a_n = 1+n^3$ la sucesión $\{2, 9, 28, 65, \dots\}$ y $\delta_n = \text{mcd}(a_{n+1}, a_n)$. Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n .

Problema 8. (2007)

Sean a, b, c, d números enteros positivos que satisfacen $ab = cd$. Demostrar que $a + b + c + d$ no es un número primo.