PROGRESIONES Y OTRAS SUCESIONES II

Elena Gil Clemente
Profesora Matemáticas
Colegio Sagrado Corazón
Universidad de Zaragoza
elenagil@unizar.es

PROGRESIONES Y OTRAS SUCESIONES II

Elena Gil Clemente
Profesora Matemáticas
Colegio Sagrado Corazón
Universidad de Zaragoza
elenagil@unizar.es

1. PARA EMPEZAR, UN BREVE REPASO A LO QUE YA SABEMOS…

El pasado curso estudiamos los conceptos fundamentales de este tema: aquí en esta sesión, y también en vuestro curso de 3º ESO.
Repasaremos mediante ejercicios las técnicas que ya aprendisteis, para poder profundizar un poco más.

Sucesión de Fibonacci: ¿recuerdas el ejemplo de la pareja de conejos que se reproducía cada mes dando lugar a otra pareja de conejos? Daba así lugar a una de las sucesiones más famosas de la historia: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11… definida por recurrencia y llamada también sucesión ecológica por la cantidad de veces que aparece en la naturaleza

Sucesiones y su término general: definimos así sucesión como una serie ordenada de números, que en ocasiones se pueden calcular a partir del lugar que ocupan mediante la fórmula del término general:

Ejemplos: ¿sabrías calcular el término general de:

a) 1,4,7,10,13….
b) 1,4,9,16,25…
c) 2, 6, 12, 20, 30,…
d) 2,6,18,54,162…
e) 4,7,12,19,…..

En algunas sucesiones los cálculos son más sencillos porque los términos cumplen una determinada característica: son las progresiones.

Progresiones aritméticas: cada término se obtiene a partir del anterior sumando una cantidad fija llamada diferencia. Conseguimos así una fórmula sencilla para el cálculo del término general y de la suma de n términos consecutivos:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ ya que para pasar de } a_1 \text{ a } a_n \text{ damos } n-1 \text{ pasos de amplitud } d$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Progresiones geométricas: cada término se obtiene a partir del anterior, multiplicándolo por una cantidad fija llamada razón. Las fórmulas anteriores quedan ahora:

$$a_n = a_{1.} r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 .r^{n-1} - a_1}{r-1}$$

Si la razón de la progresión es menor que 1, se puede aspirar a sumar todos los términos de la progresión geométrica mediante la siguiente fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

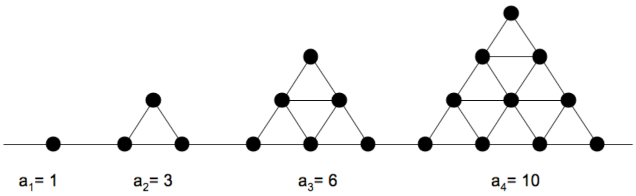
Por último recuerda que todas estas fórmulas no son mágicas sino que se deducen racionalmente y en la sesión del año pasado lo hicimos.

Algunos problemas para refrescar las ideas:

1. Números poligonales

Los números poligonales son números que pueden recomponerse geométricamente como un polígono regular (como si fueran guijarros).
Euler en sus "Elementos de Álgebra" (1795) dedica un capítulo entero a este tipo de números y describe un procedimiento para dibujarlos. En este capítulo muestra una fórmula para construir el n-ésimo número poligonal (triangular, cuadrado, pentagonal…) que está basada en las progresiones aritméticas.

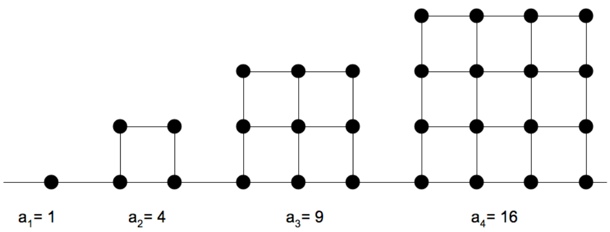
Números triangulares



Los números de esta serie son 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4… Es decir cada número es la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia 1.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (compruébalo)}$$

Números cuadrados

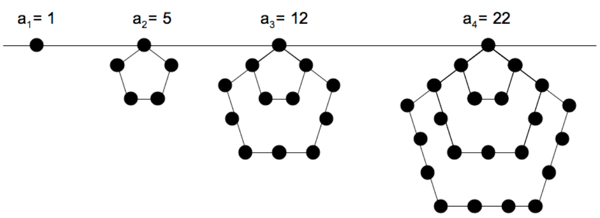


Los números de esta serie son 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7… Es decir cada número es la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia 2

$$a_n = n^2 \text{(compruébalo)}$$

Números pentagonales

Los números de la serie 1, 5, 12, 22,35…… se llaman números pentagonales porque se pueden representar así:



Los números de esta serie son 1,1+4, 1+4+7, 1+4+7+10….., Es decir cada número es la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia 3

$$a_n = \frac{(3n-1).n}{2} \text{ (compruébalo)}$$

<u>En general</u>
Con un poco de esfuerzo y procediendo análogamente podrás demostrar que la fórmula para calcular el n-ésimo número poligonal de l lados es:

$$a_n = \frac{n[(l-2).n-(l-4)]}{2}$$

<u>Curiosidades acerca de los números poligonales</u>
-Gauss (1777-1855), dedicó su atención a los números triangulares y demostró que cualquier número natural se puede expresar como suma de, como mucho, tres números triangulares.
-En la Biblia, en el Nuevo Testamento, encontramos también algunos números **triangulares:**

"Nada más saltar a tierra, ven preparadas unas brasas y un pez sobre ellas y pan. Jesús les dice: traed algunos de los peces que acabáis de pescar. Subió Simón Pedro y sacó la red a la tierra, llena de peces grandes: **ciento cincuenta y tres**. Y aún siendo tantos no se rompió la red"

Evangelio según San Juan, 21

"Diciendo esto tomó pan, dio gracias a Dios en presencia de todos, lo partió y se puso a comer. Entonces todos los demás se animaron y tomaron también alimento. Estábamos en total en la nave **doscientas setenta y seis** personas"

Hechos de los Apóstoles, 27

"!Aquí está la sabiduría! Que el inteligente calcule la cifra de la bestia; pues es la cifra de un hombre. Su cifra es **666"**

Apocalipsis,13

2. Leyenda del inventor del ajedrez

Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".
El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:
"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".
La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía el inventor.
¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

3. A vueltas con los bancos

Cuando en un banco ingresamos un capital, pongamos 1000 euros, éste nos ofrece un porcentaje anual de interés, pongamos el 4%. ¿Qué significa esto? Que al cabo de un año nuestro capital se ha convertido en

$$1000 + 4\% \text{ de } 1000, \text{ es decir } 1000+\frac{4}{100}.1000 = 1000 + 40 = 1040.$$

$$\text{Escrito de otra manera } \left(1+\frac{4}{100}\right).1000 = 1.04 \ . \ 1000$$

al finalizar el segundo año, el 4 % se aplica sobre estas 1040 pesetas, y obtenemos:

$$1040 + 1040.\frac{4}{100} = 1040.(1 + \frac{4}{100}) = 1040.1{,}04$$

Si colocamos estas cantidades seguidas:

1000, 1000.1,04, 1040.1.04…..

¿Te recuerdan a algo? Efectivamente son los términos de una progresión geométrica de razón 1.04.

Seguro que ahora eres capaz de saber, cuánto dinero tendremos al final del quinto año si no sacamos ningún dinero del banco esos años.

Así que las progresiones están muy presentes en los cálculos bancarios…

Una vez finalizado este repaso, nos vamos a centrar este año en algunas aplicaciones interesantes de las sucesiones:

-Las progresiones y el crecimiento de la población

-La sucesión de Fibonacci y el número aúreo

-La sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y el número e .

-Las series infinitas

2. LAS PROGRESIONES Y EL CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN. TEORÍAS DE MALTHUS.

En el capítulo 2 de su célebre *ENSAYO SOBRE LA POBLACIÓN* escrito en 1798, Malthus enunció una famosa ley general sobre la relación entre el crecimiento de la población mundial y el crecimiento de los recursos naturales.

“Yo afirmo, que si la población no se controla, crece en progresión geométrica, mientras que los recursos naturales de subsistencia crecen en progresión aritmética”

Tú, que ya has estudiado la gran diferencia que hay entre el crecimiento de una progresión aritmética y el de una geométrica, podrás comprender las consecuencias dramáticas a largo plazo, que tendría esta ley de ser cierta.

Malthus en este ensayo, cuenta cómo en los últimos 25 años, la población de los EEUU, se ha duplicado, luego es de esperar que lo vuelva a hacer en los próximos 25 años, y así sucesivamente, por lo que *obviamente* estamos ante un **crecimiento geométrico**

Nos pide que pensemos lo siguiente: suponiendo que en los primeros 25 años, aplicando todas las mejores técnicas agrarias conocidas, se pudiera duplicar la producción, ¿es lógico suponer que se va a poder multiplicar por 2 en los siguientes 25? Esto es contrario a todo lo que sabemos (salvo que la Tierra se convierta rápidamente en un gran jardín). Lo mejor que podemos imaginar es que en esos 25 años, aumente la misma cantidad que ha amentado en los primeros: es decir estamos *obviamente* ante **un crecimiento aritmético**.

Para entenderlo mejor:
Imagina un diminuto país que solo tenga 50 habitantes. Imagina que cada uno necesita 20 kilos de comida anuales para sobrevivir.
Supón, que el primer año hay recursos suficientes para dar de comer a todos ellos y que estos recursos crecen cada año en una cantidad igual a los recursos que hay el primer año. Imagina que la población, efectivamente se duplica anualmente.

Completa la siguiente tabla

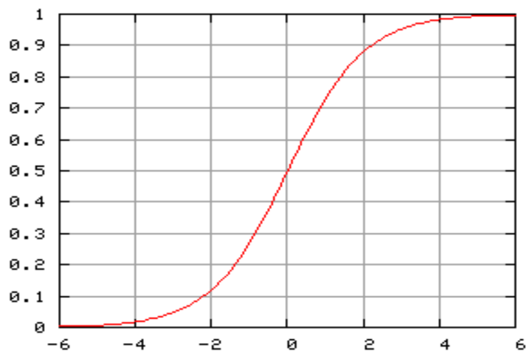
Año	Población	Kilos de comida en el país	Personas a las que se puede alimentar

¿Comprendes ahora mejor el problema que se presenta?

Malthus, en su ensayo, os invita a hacer un estudio conjunto de los dos crecimientos: supongamos que en el momento de escribir el ensayo, la población inglesa es de 7 millones de personas, y que hay medios de subsistencia para todos ellos. Pasados 25 años, tendríamos 14 millones de personas y medios de subsistencia para esos 14 millones: parece que la cosa va bien. Pero en los siguientes 25 años, los problemas empiezan a aparecer porque mientras tenemos ya 28 millones de personas, los medios de subsistencia solo darían para 21 y si seguimos calculando al final del primer siglo, habría en Inglaterra 112 millones de personas y medios de subsistencia para 35: es decir 77 millones de personas sin acceso a comida.

Ante este claro problema, que tú podrás apreciar en toda su magnitud dados tus conocimientos sobre progresiones, Malthus plantea: es claro que en las especies de plantas y animales, la reproducción no sigue solo leyes naturales, ya que la pueden frenar cosas como la falta de espacio natural, la falta de fuentes de alimentación, las catástrofes naturales. ¿Se puede esperar que también se apliquen correctivos al crecimiento ilimitado de la población humana, sabiendo como sabemos que la población está condenada a una vida de miseria si no tiene los recursos necesarios? Fue el comienzo de la idea de la necesidad de controlar la población mundial, que es tan controvertida y que junto con una mejora evidente de las condiciones de vida en algunos países, ha conducido también a gran dolor y sufrimiento en otros, como es el caso de China y su política del hijo único, que condujo al abandono de miles de niñas (y que afortunadamente ya se ha revocado)

Estudios posteriores han matizado que el crecimiento de la población en la práctica no crece según una progresión geométrica, como predijo Malthus, sino que se ajusta más bien a la denominada curva logística. Verhults, en 1838 en su libro “Investigaciones matemáticas sobre las leyes de crecimiento de la población”, observó que dentro de cada época cultural la tasa de crecimiento de la población no ha sido constante. En realidad, al principio la tasa crece suavemente hasta su máximo, llega un momento en que se encuentra la relación óptima entre el número de habitantes y sus recursos y la tasa de crecimiento va bajando hasta que la curva de población se comporta prácticamente como una curva horizontal.



3. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y EL NUMERO ÁUREO.

Recuerda que la sucesión de Fibonacci,(la de los conejos) se escribe de la siguiente manera:

1 ,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…….

Cada término se obtiene sumando los dos anteriores y por eso decimos que el término general se obtiene por recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

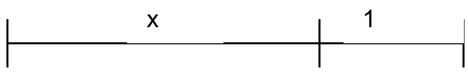
La sucesión de Fibonacci tiene mucho ver con uno de los números irracionales más famosos de la historia de las matemáticas: el número aúreo.

Veamos primero qué es el **número áureo**.

El número aúreo se conoce desde la Antigüedad griega y aparece en muchos temas de la geometría clásica.

En la célebre obra de Euclides *Elementos* aparece por primera vez el número áureo al "dividir un segmento en su media y extrema razón". Utilizando sus palabras "*se dice que una recta ha sido cortada en su media y extrema razón cuando el conjunto de la línea guarda la misma proporción con respecto a su segmento mayor que este último con el menor"*

Supongamos que queremos dividir un segmento de longitud 1+x en dos partes de manera que la razón entre el total y la parte grande sea la misma que entre la parte grande y la pequeña



Nos encontramos ante el siguiente problema:

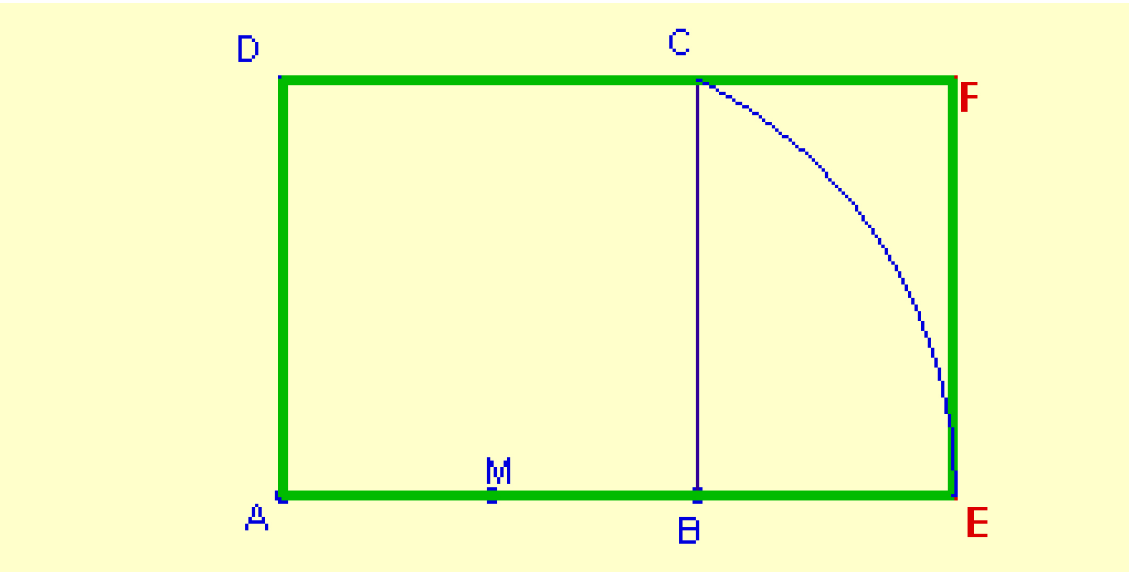
$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

Al resolver este problema nos encontramos con el número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que llamamos número áureo

Su expresión decimal es mucho más complicada: aquí tienes una aproximación (de 500 cifras…)

1. 61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 8057628621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 18939 11374 84754 08807 53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 6076672635 44333 89086 59593 95829 05638 32266 13199 28290 26788 06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432 16269 54862 6296313614 43814 97587 01220 34080 58879 54454 74924 61856 95364 86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098 74339 4422125448 77066 47809 15884 60749 98871 24007 65217 05751 7978834166 25624 94075 89069 70400 02812 10427 62177 11177 78053 15317 14101 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874 80710 …

Con este número se puede construir un rectángulo de proporciones áureas (base/altura= ϕ)



Comprobad que los rectángulos AEDF y BECF son áureos.

¿Y qué tiene que ver este número con la sucesión de Fibonacci?

Para averiguarlo, divide cada término de la sucesión de Fibonacci por el anterior y ve anotando los resultados. Obtendrás una nueva sucesión. Calcula al menos 20 términos de esta sucesión, ¿qué observas? Efectivamente van apareciendo aproximaciones sucesivas del número áureo.

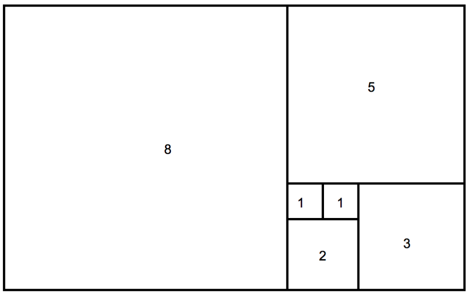
Llamaremos a esta sucesión *sucesión de las razones de los números de Fibonacci*

$$a_n = \frac{fib_{n+1}}{fib_n}$$

Lo qué hemos hecho es lo que en matemáticas se llama calcular el **límite de una sucesión** (¿a qué valor se van aproximando los términos cuando calculamos términos cada vez más avanzados?). En este caso hemos obtenido:

$$\lim \frac{\mathrm{fib}_{n+1}}{\mathrm{fib}_n} = \phi$$

Esta sorprendente relación entre los términos de la sucesión de Fibonacci y el número áureo se puede plasmar geométricamente en la siguiente figura donde cada uno de los rectángulos dibujados (2x1,3x2, 5x3, 8x5, 13x8) son aproximaciones cada vez mejores de un rectángulo aúreo.



4. LA SUCESIÓN $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Y EL NÚMERO e

La sucesión $\left(1+\frac{1}{k}\right)^n$ con k un número fijo aparece en muchas ocasiones relacionada con el crecimiento. ¿recuerdas el problema de los bancos? Allí multiplicábamos por la cantidad $\left(1+\frac{4}{100}\right)^n$, para saber cuánto ha crecido el dinero que deposito en el banco en n años. Los términos de esta sucesión se hacen obviamente cada vez más grandes (es una progresión geométrica de razón mayor que 1)

Primer ejemplo*:*

Llamamos *inflación* a la pérdida del valor adquisitivo del dinero. Es decir, si un artículo que costó 100€, al cabo de un año cuesta 115€, la inflación habrá sido del 15%. Supongamos una inflación constante del 15 % anual. Escribe la sucesión a_n que nos muestre el valor de un terreno que hoy cuesta 5000 euros, en los próximos 7 años. ¿qué tipo de sucesión es? Cómo los términos se hacen cada vez más grandes decimos que

$\lim a_n = \infty$ (límite de la sucesión igual a infinito: sucesión divergente)

Otro ejemplo aparentemente similar: la avaricia del usurero.

Ver https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

Consideramos que ingresamos en un banco 1€ al 100% anual. Al cabo de un año tendremos 1+1=2€.

Si el abono de intereses se realiza mensualmente, al cabo de un año tendremos $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ =2.61. Así pues, el capital ha aumentado un 161%.
Si el abono de intereses se realiza diariamente, al cabo de un año tendremos, $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ =2.7145. Así pues el capital ha aumentado un 171.45%
Un usurero muy avaro, plantea al banco su deseo de que le sean abonados los intereses cada hora, o mejor aún, cada minuto, pensando que de esta forma obtendrá unos beneficios muy suculentos. El director del banco accede a su petición, pero además le comunica que van a seguir mejorando su propuesta, pues le abonarán los intereses cada segundo. ¿Podrías calcular en cuánto se convertirá un euro al final del primer año? (1 año= 31 536 000 segundos). Este euro se convertirá en

$$\left(1+\frac{1}{31\,536\,000}\right)^{31\,536\,000} = 2.7174 \text{ euros.}$$

Así pues el capital ha aumentado un 171.74 %, con lo cuál el avaro nunca llegará a obtener 3 €, en contra de sus materialistas intenciones. El ejemplo no es, pues,tan parecido….

Más aún, suponiendo que el año se divide en n partes iguales, haciendo n cada vez más grande, nunca se conseguirá que 1€ se convierta en 3€: todo lo más que conseguiremos es que se convierta en 2.718€.

Para ello tenemos que considerar la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, en la que la que la cantidad que sumamos a 1 también es variable. Esta sucesión es de crecimiento muy lento, así que empieza calculando el término 80 y a partir de ahí 10 términos más. Observamos que cada vez hay más cifras decimales estabilizadas, pero siempre aparece una última cifra distinta.
Esta sucesión no tiende a infinito, como la del primer ejemplo, sino que tiende a un número. El número límite de esta sucesión no tiene un número finito de cifras decimales, ni tampoco se repiten periódicamente (esto no es fácil de demostrar…). Se trata pues de un nuevo número irracional desconocido por nosotros hasta ahora que llamaremos **número e** (por el matemático alemán Euler). Una aproximación de este valor es

2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 95749 66967 6277…

Este número es algo más que irracional. Es trascendente, porque no aparece como solución de ninguna ecuación algebraica, como el número de oro. Esto todavía es más difícil de demostrar.

Este curioso **número e** aparece en una sorprendente cantidad de situaciones diferentes, algo parecido a lo que ocurre con el número aúreo. Aquí tienes algunas…

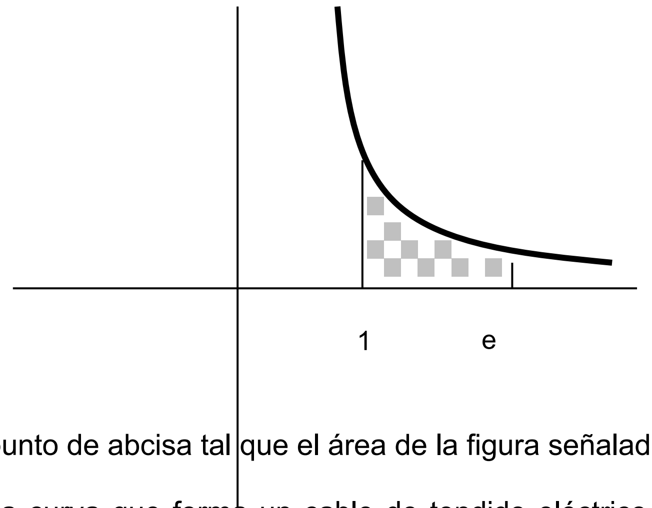
1. Suma la cantidad $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$.¿qué obtienes? Efectivamente una aproximación del número e.

2. Calcula distintas aproximaciones a esta fracción continua

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\ldots}}}}}$$

Volvemos a obtener el número e.

3. Representamos la función $y=\frac{1}{x}$, que relaciona cada número con su inverso. Resulta la hipérbola equilátera siguiente



El número e es el punto de abcisa tal que el área de la figura señalada sea 1.

4. Si observamos la curva que forma un cable de tendido eléctrico entre dos postes consecutivos, siempre tiene la misma forma. Parece un arco de parábola pero no lo es. Esta curva se llama **catenaria** (el nombre viene de la palabra cadena) y su ecuación es precisamente

$$y=e^{x}+e^{-x}$$

5.LAS SERIES INFINITAS

Una serie infinita es la suma de los infinitos términos de una sucesión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Por lo tanto es un concepto que lleva implícita la noción de límite.

Las series infinitas pueden converger (si el límite anterior existe), diverger (si es infinito) u oscilar (si el límite lo hace).

¿Conoces alguna serie infinita y su valor? Si recuerdas cuando empezamos hablando de progresiones decíamos: "la suma de infinitos términos de una progresión geométrica de razón entre -1 y 1 es $\frac{a_1}{1-r}$"

Dicho de otra manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} \text{ si } r \text{ está entre -1 y 1.}$$

A esta serie se la llama serie geométrica y da lugar a interesantes fórmulas como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Fíjate en que una de las condiciones necesarias para que una serie converja es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplos interesantes (y sorprendentes) de series convergentes y divergentes

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Es la llamada serie armónica

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Este resultado obtenido por Euler no es en absoluto trivial.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es convergente. No se conoce su valor. Solo se sabe que es un número irracional. Como dijo Jakob Bernoilli en 1689: *"Si alguien encuentra y nos comunica eso que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos nuestra gratitud será enorme"*

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2$. ¿Recuerdas qué números son los denominadores de esta serie? Sí los números triángulares de los que hablamos en otro apartado.

La importancia de las series infinitas radica en que muchas de las funciones no polinómicas conocidas se pueden transformar en una suma de infinitos términos de una sucesión de potencias, usando fórmulas como la fórmula de Taylor (que usa derivadas y por tanto es difícil de entender en este curso).
Usando estos llamados desarrollos en serie funciones como los logaritmos, las exponenciales o las trigonométricas se pueden aproximar con funciones polinómicas y facilitar su manejo.