



## Preparación Olímpica IV: Razones geométricas y semejanza

[1] En un triángulo isósceles  $ABC$  cuyos lados iguales son  $AB$  y  $BC$  existe un punto  $P$  en el lado  $BC$  tal que  $\overline{BP} = \overline{PA} = \overline{AC}$ .

[1.1] Calcula la medida de los ángulos del triángulo  $ABC$ .

[1.2] Halla el valor de la razón  $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}$ . ¿Qué relación tiene con la proporción áurea?

[2] Al trazar las diagonales de un pentágono regular se forma en su interior un nuevo pentágono regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos pentágonos?

[3, Teorema de la bisectriz] Dado un triángulo  $ABC$  cualquiera, llamemos  $P$  al pie sobre el lado  $BC$  de la bisectriz trazada desde  $A$ . Demostrar que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$ .

[4] El trapecio isósceles  $ABCD$  tiene lados paralelos  $AB$  y  $CD$ . Sabemos que  $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{AD} = 5$  y  $\angle DAB = 60^\circ$ . Se lanza un rayo de luz desde  $A$  que rebota en  $CB$  en el punto  $E$  e interseca en  $AD$  en el punto  $F$ . Si  $\overline{AF} = 3$ , calcula el área del triángulo  $AFE$ .

[5] En el triángulo acutángulo  $ABC$  se consideran los puntos  $H, D$  y  $M$  del lado  $BC$ , que son pies respectivos de la altura  $AH$ , la bisectriz  $AD$  y la mediana  $AM$  que parten desde el vértice  $A$ . Si las longitudes de  $\overline{AB}, \overline{AC}$  y  $\overline{MD}$  son respectivamente 11, 8 y 1, calcule la longitud del segmento  $\overline{DH}$ .

[6] Se dan dos circunferencias, de centros  $O$  y  $O'$  y radios  $R = 8$  y  $R' = 4$ , respectivamente, tangentes exteriores en el punto  $A$ . Por un punto  $B$  de la tangente común, se trazan dos tangentes  $BC$  y  $BC'$ , siendo  $C$  y  $C'$  los puntos de contacto con cada una de las circunferencias. Sea  $x = \overline{AB}$ . Calcula el límite de la razón de las áreas de los triángulos  $ABC$  y  $ABC'$  cuando:

[6.1]  $x$  tiende a  $+\infty$ .

[6.2]  $x$  tiende a 0.