Problemas Olímpicos IV

Problema 1. Sean a y b números positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Problema 2. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\angle BAC = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

Problema 3. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar la misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

Problema 4. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

Problema 5. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

Problema 6. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$, $\angle DBC = 30°$ y $\angle ABD = 90°$, calcula el valor de $\overline{AD}$.