Crónica de la sesión del 19 de mayo de 2023

Matemáticas con las manos y con la cabeza: “Geometría conPlot”, segunda parte. Florencio Villarroya Bullido

Mi idea era presentar esta sesión, para el alumnado de cuarto de la ESO, como continuación de la sesión del curso anterior para tercero.

Al llegar había una docena escasa de participantes y les pregunto, si habían estado en la sesión del año anterior. Tres responden que sí. Entonces les pregunto que si se acuerdan de lo que trabajamos, y a duras penas recordaron que iba de poliedros, y añadir regulares les costó un poco.

Esto hizo que tuviera que orientar de nuevo la sesión un poco como el año anterior.

Abordamos la construcción de los poliedros regulares con el material PLOT, que lleva su tiempo, para que sacasen como teorema que solo existen cinco poliedros regulares.

Mi intención era, a partir de los poliedros regulares, pasar, por truncamientos a los poliedros semirregulares, pero no fue así.

Entonces les pregunte, cogiendo un cubo, que cuál sería el volumen de un cubo que pudiéramos construir con la arista el doble del mostrado, la respuesta fue unánime: ocho veces. Perfecto, van en el buen camino, pienso yo. Entonces repito la misma pregunta con el tetraedro, habíamos construido un tetraedro de arista uno y otro de arista doble, para que los tuvieran a la vista. La pregunta es ¿cuál es el volumen del tetraedro grande comparado con el pequeño? O dicho de otro modo ¿cuántos tetraedros de arista uno caben en el tetraedro de arista dos?

La respuesta, dubitativa de los asistentes fue cinco, quizá seis. (Es la respuesta que he obtenido siempre en clase cuando la he formulado).

Entonces les sugiero que calculen el volumen del tetraedro de arista uno, pero … no les apetece, aunque se saben la fórmula del volumen de un pirámide, pero claro calcular la altura no es fácil (para ellos).

Ahora les propongo que sobre el tetraedro de arista dos, se fijen bien que sobre las cuatro caras, sobre el triángulo central se puede montar otro tetraedro de arista uno. Entonces llegan los “Ohes” de admiración. Pues ven que se forma una figura bellísima, les digo su nombre “Stella Octángula”, y ven que los vértices externos de los dos tetraedros que se cruzan son los vértices de un cubo, de arista por determinar (cosa que no hacemos).

Les pido entonces que desmonten los ocho tetraedros pequeños, con la imaginación, y digan que es lo que queda. Con sorpresa descubren que un octaedro de arista uno, claro.

Les hago reflexionar sobre el cubo que se ha formado, y si se aumenta su tamaño. Multiplicando la arista por dos o por tres el volumen se multiplicará, por ocho o veintisiete respectivamente. Para llegar a la conclusión que el tetraedro de arista dos tiene ocho veces el volumen del tetraedro de arista uno.

La conclusión que se puede sacar es clara, el volumen de un octaedro de una arista dada equivale al volumen de cuatro tetraedros; así que es más fácil calcular el volumen del octaedro, pues está formado por dos pirámides de base común cuadrada, en los que el área de la base y la altura son más fáciles de determinar, para aplicar la fórmula.

Respecto a la fórmula para calcular el volumen de una pirámide que se explica tradicionalmente a partir de un prisma triangular, etc, apoyándose en el principio de Cavalieri, (que creo que la mayoría no entiende), pienso que es más sugerente a partir del cubo, descomponerlo en seis pirámides cuadradas, una por cada cara con vértice-cúspide central común. En cada pirámide, la base es un cuadrado, y la altura la mitad del lado del cubo. Por tanto de aquí se puede deducir el volumen de cada una d esas pirámides, dando lugar a la fórmula famosa, del un tercio …

Otra observación importante es que cada uno de los huecos que quedan entre la stella octángula y las paredes del cubo, es medio octaedro. De manera que un cubo de arista $\sqrt{2}$, se descompone en ocho tetraedros de arista uno y cuatro octaedros de arista uno: uno en el centro y seis medios en cada cara. Con ello se obtiene una hermosa relación entre los volúmenes del cubo, tetraedro y octaedro.

La sesión no fue mucho más allá, como yo hubiera querido. Los asistentes estaban interesados en saber por qué yo era profesor de matemáticas. Si bien más o menos les expliqué que los balones de balonmano y fútbol tradicionales (que actualmente se siguen viendo, aunque no en las Copas europeas) son poliedros semirregulares o arquimedianos obtenidos a partir del icosaedro, por cortes a la mitad o a un tercio del vértice, pero no nos dio tiempo aconstruirlos.

Les ofrecí que se llevasen material a casa para hacerlos y tampoco estuvieron interesados.

En fin, esto es todo lo que pude hacer y puedo contar.

Florencio Villarroya, catedrático jubilado de matemáticas, expresidente de la federación española de sociedades de profesores de matemáticas (FESPM).