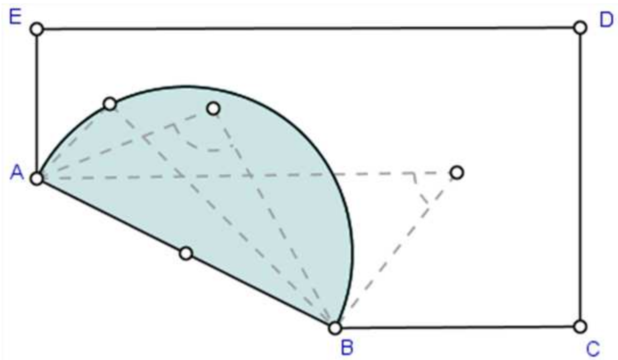
PROBLEMAS GEOMÉTRICOS. SOLUCIONES

PROBABILIDAD

1. Se selecciona al azar un punto P del interior del pentágono de vértices $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(2\pi+1,0)$, $D(2\pi+1,4)$ y $E(0,4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo $\angle APB$ sea obtuso?



Los puntos P cuyo ángulo $\angle APB$ sea obtuso deben ser interiores a la circunferencia de diámetro AB. La probabilidad buscada será el cociente entre las áreas de las regiones favorable (semicírculo) y factible (pentágono).

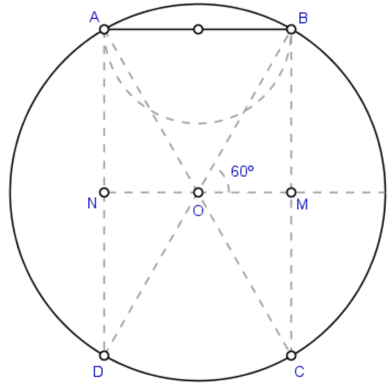
$$AB = 2\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad p(\angle APB > 90°) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2}{(2\pi+1)\cdot 4} = \frac{5\pi}{16\pi+8}$$

2. En la circunferencia $\mathscr{C}$ de radio r, se considera la cuerda $\overline{AB}$ de longitud r. Se elige al azar un punto P del círculo, hallar la probabilidad de que el triángulo ABP sea acutángulo si:

   (a) P está en la circunferencia.

   (b) P es un punto del interior del círculo.

(a) El arco AB es de 60° ($\overline{AB} = r$ es el lado del hexágono inscrito), entonces, si P es un punto de la circunferencia, $\angle APB$ será igual a 30° o bien 150° dependiendo si está entre A y B en el arco inferior o en el superior. Y los ángulos $\angle PAB$ y $\angle PBA$ serán también agudos si P está entre C y D (diametralmente opuestos a A y B).



La probabilidad será, pues:

$$p(APB\ acutángulo) = \frac{\frac{60}{360}\cdot 2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{6}$$

(b) P tendrá que ser exterior a la circunferencia con diámetro AB y estar a la derecha de AD y a la izquierda de BC. Así, el área de la región favorable será igual a: sector OCD + 2·OMC + rectángulo ABMN – semicírculo AB:

$$S = \frac{60}{360}\cdot\pi r^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot r}{2} + r\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot r}{2} - \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot r^2 + \frac{1}{24}\cdot\pi r^2 = \frac{18\sqrt{3}+\pi}{24}\cdot r^2$$

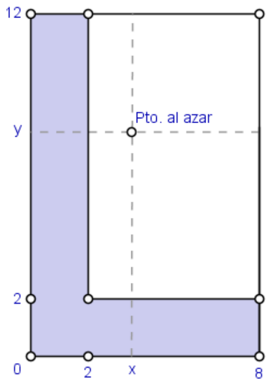
Y la probabilidad, en este caso, es:

$$p(PAB\ acutángulo) = \frac{\frac{18\sqrt{3}+\pi}{24}\cdot r^2}{\pi\cdot r^2} = \frac{18\sqrt{3}+\pi}{24\cdot\pi}$$

3. En una ciudad, debido al tráfico, los autobuses no consiguen cumplir los horarios establecidos aunque mantienen sus frecuencias de paso. En una parada de autobús paran los de las líneas A y B con frecuencias respectivas de 8 y 12 minutos. Si llegamos a la parada en un momento cualquiera, calcular la probabilidad de que:

   (a) Pase un autobús (A o B) antes de 2 minutos.

   (b) El primer autobús que pase sea de la línea A.

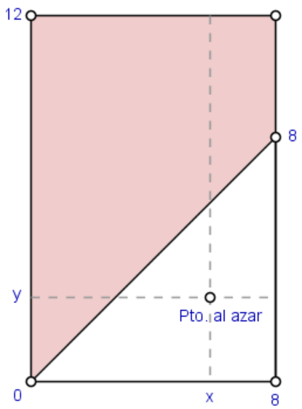


(a) Nuestro problema se puede modelizar con un rectángulo 8x12 en el que la abscisa de un punto es el tiempo que tarda el autobús A en llegar a la parada, y su ordenada el tiempo que tarda el B.

La región que nos es propicia es la de aquellos puntos en las que una cualquiera de sus coordenadas sea menor que 2, pues no nos importa si es A o B quien llegue primero. Así:

$$p(x < 2 \ \ o \ \ y < 2) = \frac{8 \cdot 2 + 10 \cdot 2}{8 \cdot 12} = \frac{36}{8 \cdot 12} = \frac{3}{8}$$

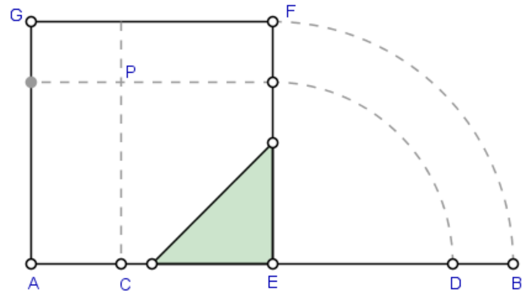
(b) En este caso, la situación es algo diferente, la región que nos es favorable es ahora:



Por lo que la solución será:

$$x < y \quad \rightarrow \quad p(x < y) = 1 - \frac{\frac{8 \cdot 8}{2}}{8 \cdot 12} = 1 - \frac{4}{12} = \frac{2}{3}$$

4. En el segmento AB, E es el punto medio. Se eligen, al azar, un punto C del segmento AE, y otro D de EB. ¿Cuál es la probabilidad de que CD sea menor que la cuarta parte de $\overline{AB}^-$



Podemos suponer que la barra mide 2 unidades. Elegir dos puntos en los segmentos equivale a elegir un punto en el interior del cuadrado $AEFG$.

Si $\overline{AC} = x$, $\overline{CE} = 1 - x$, $\overline{ED} = \overline{PC} = y$. Por lo que P será un punto favorable si

$$(1 - x) + y < \frac{\overline{AB}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y < x - \frac{1}{2}$$

que es la región sombreada de la figura, con lo que:

$$p\left(\overline{CD} < \frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2}}{1} = \frac{1}{8}$$

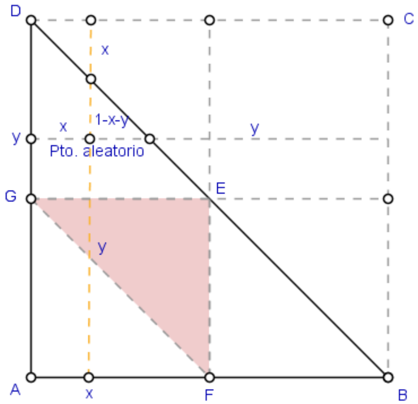
5. Una barra se rompe al azar en dos puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que con las tres partes resultantes se pueda formar un triángulo?

Aparentemente el problema es de tres dimensiones, pues hay tres trozos. Pero el tercer trozo queda perfectamente determinado por la medida de los dos primeros, luego es de dos variables.

Para simplificar consideraremos que la barra mide 1 unidad, así sólo tenemos que determinar dos puntos del intervalo (0,1). Si los dos primeros trozos miden x, y , el tercero medirá $1 - x - y$. Así, las restricciones que tenemos en el problema son:

$$0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < 1 - x$$

La región *"factible"* que represente todos los posibles casos será el triángulo rectángulo con catetos de 1 unidad. Cada punto de éste, junto con el correspondiente de la diagonal con su misma abscisa (u ordenada) divide el segmento [0,1] en tres partes.



Para que se pueda formar un triángulo con los tres trozos se tiene que verificar la desigualdad triangular para los tres trozos:

$$x \leq y + (1 - x - y) \quad \rightarrow \quad 2x \leq 1 \quad \rightarrow \quad x \leq \tfrac{1}{2}$$

$$y \leq x + (1 - x - y) \quad \rightarrow \quad 2y \leq 1 \quad \rightarrow \quad y \leq \tfrac{1}{2}$$

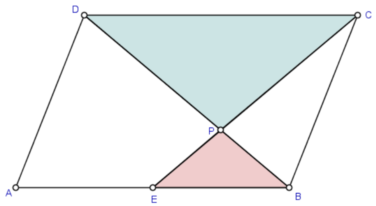
$$1 - x - y \leq x + y \quad \rightarrow \quad 1 - 2x \leq 2y \quad \rightarrow \quad y \geq \tfrac{1}{2} - x$$

Por lo que la región de los casos que nos son favorables es el triángulo EFG , por eso:

$$p(formar\ triángulo) = \frac{S_{EFG}}{S_{ABD}} = \frac{S_{EFG}}{4 \cdot S_{EFG}} = \frac{1}{4}$$

SANGAKUS

6. $ABCD$ es un paralelogramode base b y altura h, E el punto medio del lado AB , y P el punto intersección de BD con CE . Hallar el área de las regiones que determinan dichos segmentos en el paralelogramo en función de S_{ABCD}.



Los triángulos BPE y CDP son semejantes. Dado que EB es la mitad de CD, los demás lados y las alturas de estos triángulos guardan la misma proporción. Entonces:

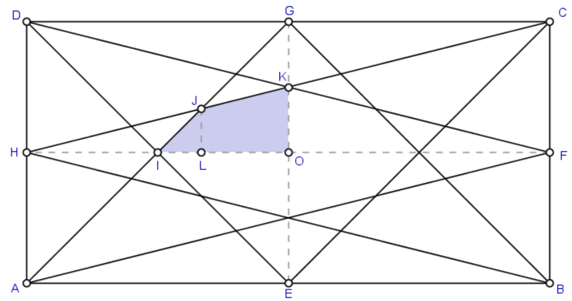
$$S_{EBP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b \cdot h}{12} = \frac{S_{ABCD}}{12}$$

$$S_{CDP} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{2h}{3} = \frac{b \cdot h}{3} = \frac{S_{ABCD}}{3}$$

$$S_{EBP} + S_{BPC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{4} \quad \rightarrow \quad S_{BPC} = \frac{b \cdot h}{4} - \frac{b \cdot h}{12} = \frac{b \cdot h}{6} = \frac{S_{ABCD}}{6}$$

$$S_{AEPD} = S_{ABCD} - (S_{EBP} + S_{BPC} + S_{CPD}) = b \cdot h \cdot \left(1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5 \cdot S_{ABCD}}{12}$$

7. En el rectángulo $ABCD$ se trazan los segmentos que unen cada vértice con los puntos medios de los lados opuestos. Calcular el área del octógono que determinan.



Sean: $a = AB$, $b = AD$. Utilizando triángulos semejantes se obtiene:

$$HDI \sim ADE \quad \rightarrow \quad HI = \frac{a}{4}$$

$$HOK \sim HFC \quad \rightarrow \quad OK = \frac{b}{4}$$

$$HIJ \sim GJC \quad \rightarrow \quad HC = 3 \cdot HJ$$

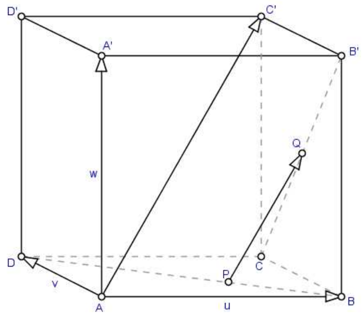
$$HJL \sim HCF \quad \rightarrow \quad JL = \frac{b}{6}$$

$$S_{IJKO} = S_{HKO} - S_{HJI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{6} = \frac{a \cdot b}{24}$$

y:

$$S_{octógono} = 4 \cdot S_{IJKO} = \frac{a \cdot b}{6}$$

8. En el cubo $ABCDA'B'C'D'$ se consideran las diagonales de dos caras contiguas BD y CB' . Hallar dos puntos de estas diagonales que determinen un vector paralelo a la diagonal AC' del cubo.



Los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AA'}$ son linealmente independientes. Expresaremos los vectores $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{PQ}$ respecto de éstos:

$$\overrightarrow{BP} = \alpha \cdot \overrightarrow{BD} = \alpha \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{CQ} = \beta \cdot \overrightarrow{CB'} = \beta \cdot (-\vec{v} + \vec{w})$$

$$\overrightarrow{AC'} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

Dado que los vectores $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos, tienen la misma dirección, así:

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC'} = \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{BP} + \vec{v} + \beta \cdot (-\vec{v} + \vec{w}) = -\alpha \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) + \beta \cdot (-\vec{v} + \vec{w}) \\ &= \alpha \vec{u} + (1 - \alpha - \beta) \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

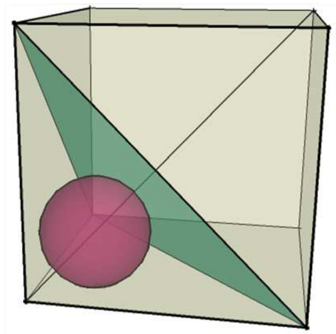
Luego:

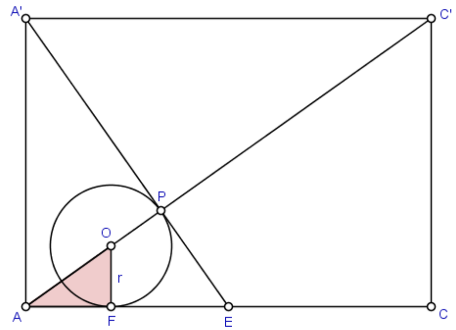
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \lambda \\ 1 - \alpha - \beta &= \lambda \\ \beta &= \lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow 1 - \lambda - \lambda = \lambda \rightarrow 1 = 3\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

O sea, P es el punto que divide a $\overrightarrow{BD}$ en la tercera parte, al igual que Q con $\overrightarrow{CB'}$.

9. En el cubo $ABCDA'B'C'D'$ se considera el plano $BA'D$. Calcular el radio de la esfera inscrita al cubo y a este plano en la esquina del vértice A .

Cortando el cubo por los vértices $ACC'A'$ se obtiene la sección:





Consideremos que la arista del cubo sea 1, por el problema 6 : $\overline{AC'} = 3 \cdot \overline{AP}$, (pues $APE \sim A'PC'$ Y $\overline{A'C'} = 2 \cdot \overline{AE}$) entonces:

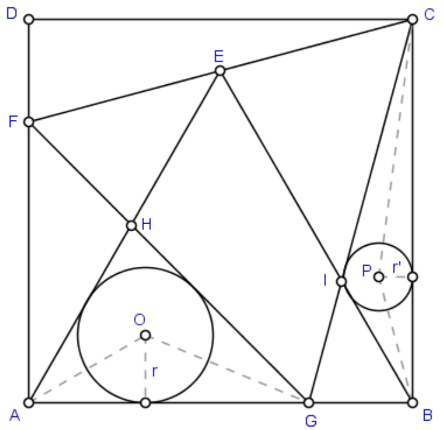
$$\overline{AC} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \overline{AC'} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \overline{AP} = \frac{1}{3} \overline{AC'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

De AFO :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 = r^2 + \left(\sqrt{2} r\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} + r^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} r = 3 \cdot r^2$$

$$6\, r^2 + 2\sqrt{3} r - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{-\sqrt{3} \pm 3}{6} \quad \rightarrow (r > 0) \;\; r = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

10. En el cuadrado $ABCD$ de lado a , se traza el triángulo equilátero ABE , y CE se prolonga hasta encontrar AD en F . Probar que se puede encontrar un punto G en AB tal que CFG sea equilátero. Sea H el punto intersección de AE con FG, e I de BE con CG, probar que el radio r del círculo inscrito a AHG es el doble de r', radio del círculo inscrito a BCI.



ABE es equilátero, luego $\angle BAE = 60°$ y $\angle EBC = 30°$, y $EB = AB = BC$, con lo que EBC también es isósceles, así:

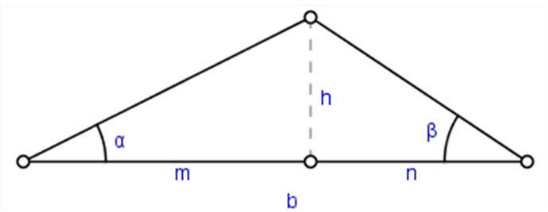
$$\angle BEC = \angle ECB = 75°, \text{ de donde } \angle FCD = 15°$$

Si G es el punto de AB tal que $\angle GCB = 15°$, el triángulo FGC será isósceles en C, por lo que $\angle CFG = \angle FGC = \alpha$ y $\angle FCG = 75° - 15° = 60°$. Por lo tanto:

$$\alpha + \alpha + 60° = 180° \quad \rightarrow \quad \alpha = 60°$$

y FCG es equilátero.

Calcularemos los radios de los círculos inscritos como las alturas de los triángulos AOG y BPC . Vamos a deducir una fórmula para no repetir operaciones:



$$\left.\begin{array}{r} \tan\alpha = \dfrac{h}{m} \\ \tan\beta = \dfrac{h}{b-m} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} m = \dfrac{h}{\tan\alpha} \\ \tan\beta\cdot\left(b - \dfrac{h}{\tan\alpha}\right) = h \end{array}\right\}$$

$$\tan\beta\cdot(b\cdot\tan\alpha - h) = h\cdot\tan\alpha \quad \rightarrow \quad h = \frac{b\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha + \cdot\tan\beta}$$

$$\angle GAE = 60° \quad \rightarrow \quad \angle GAO = 30°$$
$$\angle EBC = 30° \quad \rightarrow \quad \angle PBC = 15°$$
$$\angle BCG = 15° \quad \rightarrow \quad \angle PCB = 7'5°,$$

Además FAG es isósceles y rectángulo, luego $\angle AGF = 45°$ y $\angle AGO = 22'5°$.

Y de CGB : $\overline{GB} = a\cdot\tan 15°$:

$$r = \frac{a\cdot(1-tan\,15°)\cdot tan\,30°\cdot tan\,22{\prime}5°}{tan\,30° + tan\,22{\prime}5°} \quad , \quad r' = \frac{a\cdot tan\,15°\cdot tan\,7{\prime}5°}{tan\,15° + tan\,7{\prime}5°}$$

Utilizando las fórmulas de trigonometría, se obtiene:

$$tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}} \quad , \quad cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow tan\,15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow tan\,22°30' = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

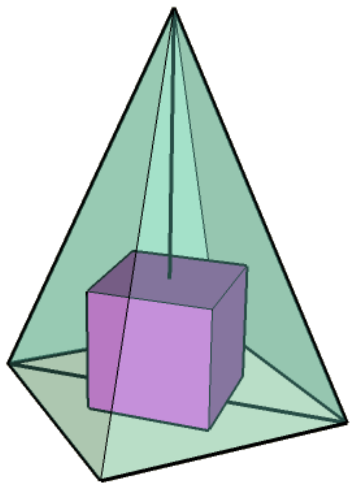
$$cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} \ , cos\,15° = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \rightarrow tan\,7°30' = \frac{\sqrt{3}-1}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

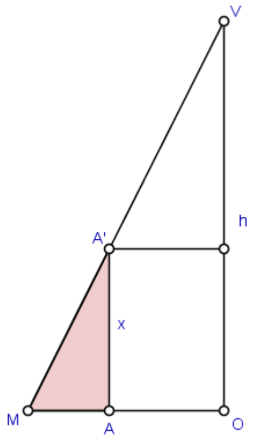
De donde, tras operar, se obtiene:

$$r = \frac{a\cdot(\sqrt{3}-1)}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \quad , \quad r' = \frac{a\cdot(\sqrt{3}-1)}{2\cdot(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{r}{2}$$

VARIA

11. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide a y su altura h. Se inscribe un cubo, apoyado sobre la base de la pirámide, tal que cuatro de las aristas del cubo son paralelas a una diagonal de la base de la pirámide. Calcular la arista del cubo en función de a y h.





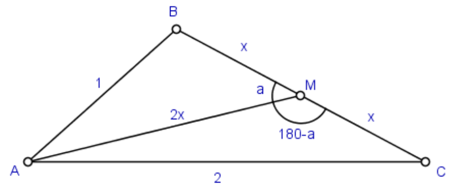
Sean $ABCDA'B'C'D'$ los vértices del cubo, V el de la pirámide, O el centro de las bases y x la arista del cubo.

$$\overline{AB} = \sqrt{2}\,x \;\rightarrow\; \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}\,x}{2} \;\rightarrow\; \overline{MA} = \frac{a - \sqrt{2}\,x}{2}$$

de la sección de la figura que pasa por V, A' y O (centro de las bases), se deduce por ser los triángulos MAA' y MOV semejantes:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MO}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OV}} \;\rightarrow\; \frac{\frac{a-\sqrt{2}\,x}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{x}{h} \;\rightarrow\; ah - \sqrt{2}\,xh = ax \;\rightarrow\; x = \frac{ah}{a + \sqrt{2}\,h}$$

12. En el triángulo ABC, M es el punto medio de BC. Si $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 2$ y $\overline{AM} = \overline{BC}$, calcular $x = \overline{BM}$.

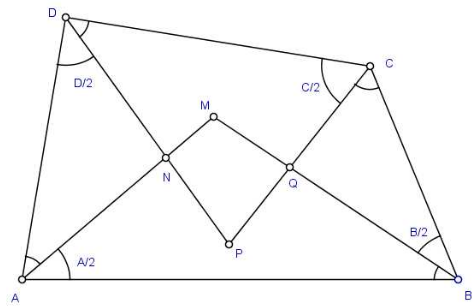


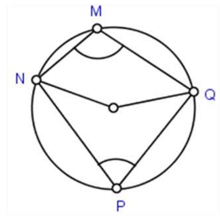
Aplicaremos el teorema del coseno a los triángulos AMB y AMC:

$$\left.\begin{array}{r} 1^2 = (2x)^2 + x^2 - 2\cdot 2x\cdot x\cdot \cos\alpha \\ 2^2 = (2x)^2 + x^2 - 2\cdot 2x\cdot x\cdot \cos(\pi-\alpha) \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 5\,x^2 - 4\,x^2\cdot\cos\alpha = 1 \\ 5\,x^2 + 4\,x^2\cdot\cos\alpha = 4 \end{array}\right\}$$

$$10\,x^2 = 5 \;\rightarrow\; x = +\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ,\ pues\ x > 0\,.$$

13. En un cuadrilátero arbitrario $ABCD$ se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices A y C con B y D son concíclicos.





Si M está en la circunferencia que pasa por N, P y Q, los ángulos centrales de los arcos NMQ y QPN deben sumar 2π, luego los inscritos desde M y P sumarán π (la mitad). Así:

$$\angle AMB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \pi - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

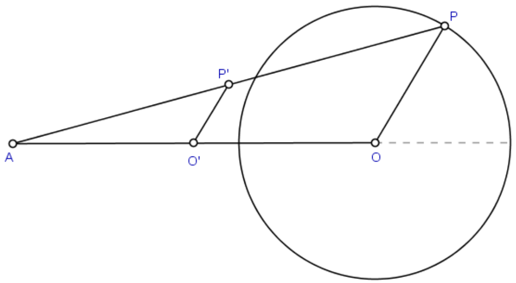
$$\angle DPC = \pi - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = \pi - \frac{\gamma+\delta}{2}$$

$$\angle AMB + \angle DPC = \left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\pi - \frac{\gamma+\delta}{2}\right) = 2\pi - \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{2} = \pi$$

Por lo que M, N, P y Q están sobre la misma circunferencia.

(pues si M fuera exterior a la circunferencia: $\angle NMQ + \angle NPQ < \pi$, y si fuera interior $\angle NMQ + \angle NPQ > \pi$).

14. Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ y un punto A exterior a ella, demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de A y un punto P genérico de $\mathscr{C}$ es otra circunferencia.



Por simetría, el centro de la nueva circunferencia debe ser O' punto medio de A y O, centro de $\mathscr{C}$. Sea P un punto cualquiera de $\mathscr{C}$ y P' el punto medio de A y P.

Por la semejanza de los triángulos AOP, $AO'P'$:

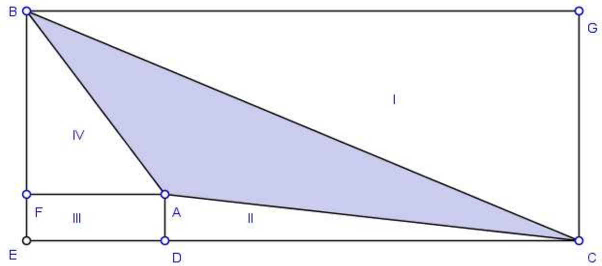
$$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{AO'}}{2\,\overline{AO'}}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \overline{O'P'}=\frac{\overline{OP}}{2}=\frac{r}{2}$$

Por lo que su distancia a O' es siempre constante, independientemente del punto P elegido. Luego se trata, efectivamente, de una circunferencia.

15. Probar que si las coordenadas de los vértices de un polígono son racionales, su área es racional.

Un polígono siempre se puede triangularizar, siendo su área la suma de las áreas de triángulos con vértices racionales. Así, pues, el problema se reduce a comprobar el caso para un triángulo.

Consideremos el triángulo determinado por los puntos A, B y C, y sean C, D, E, F y G de tal manera que $BGCE$ sea el rectángulo de lados paralelos a los ejes que contiene inscrito a ABC.



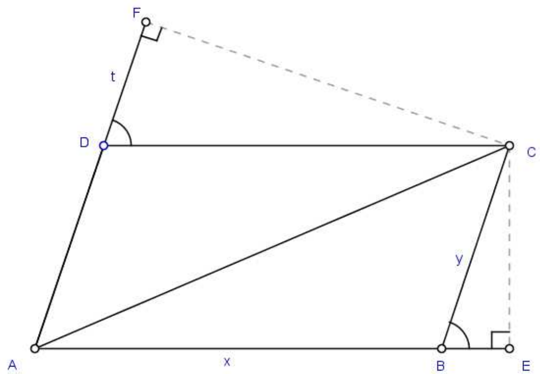
Como las coordenadas de A, B y C son racionales, támbiénlo seránlas de D, E, F, G y sus distancias respectivas BG, GC, CD, DE, EF, GC y FB, luego también lo serán las áreas de $BGCE$, ADC, $FADE$, BFA, y BGC

Así, como: $S_{ABC}=S_{BGCE}-(S_I+S_{II}+S_{III}+S_{IV})$, también S_{ABC} será racional.

El razonamiento sirve para todas las posiciones relativas que puedan tener los puntos A, B y C.

16. En el paralelogramo ABCD, sea AC la diagonal mayor, y E, F los pies de estas perpendiculares trazadas desde C a AB y AD. Demostrar que:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}^2 .$$



Por el producto escalar de vectores abemos que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \quad , \quad \vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

De $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}^2=$$

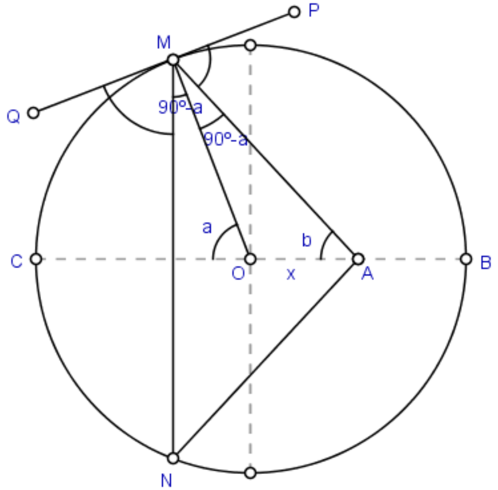
$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha=$$

$$= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BE}| + |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{DF}| =$$
$$= \left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}\right) + \left(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DF}\right) =$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) + \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} =$$
$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AE}| + |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AF}| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}$$

17. En un billar perfectamente circular, de radio r , se halla situada en el punto A una bola a una distancia x del centro. Se lanza sobre un punto del borde y, tras rebotar dos veces, vuelve a A. ¿Sobre qué punto se ha lanzado?

Sin pérdida de generalidad, supondremos que A está en la parte positiva del eje de abscisas y que el primer punto sobre el que se lanza la bola, M, tiene ordenada positiva. El enunciado señala implícitamente que el primer paso por A se produce en el segundo trayecto (de N hacia A), por lo que descartamos los puntos B y C (con ordenada nula).

Sea PQ la tangente en M, y $\alpha = \angle COM$, $0° < \alpha < 90°$.



El ángulo de incidencia es igual al reflejado, $\angle AMP = \angle QMN$, y por ser OM perpendicular a PQ : $\angle AMO = \angle OMN$. Por la misma razón $\angle MNO = \angle ONA$.

$\overline{OM} = r = \overline{ON}$, así el triángulo MNO es isósceles en O, con lo que $\angle OMN = \angle MNO$ y entonces:

$$\angle AMO = \angle OMN = \angle MNO = \angle ONA$$

el triángulo AMN también es isósceles en A, y AO perpendicular a MN. Así, pues, M no puede estar en el I cuadrante, pues entonces N lo estaría en el II o en el III.

En el triángulo AMO:

$$\beta + (\pi - \alpha) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi \quad \rightarrow \quad \beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

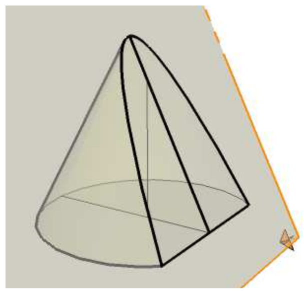
Y por el teorema de los senos:

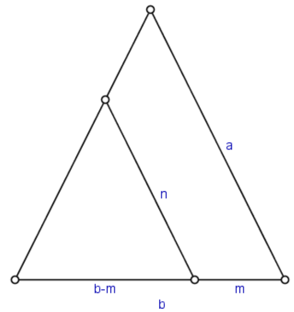
$$\frac{x}{sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{r}{sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{cos\,\alpha} = \frac{r}{1 - 2\,cos^2\,\alpha}$$

$$2x\,cos^2\,\alpha + r\,cos\,\alpha - x = 0 \quad \rightarrow \quad cos\,\alpha = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8x^2}}{4x}$$

y, como $\cos\alpha > 0$: $\quad \cos\alpha = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 8x^2}}{4x}$

18. Dado un cono recto de generatriz a y diámetro de la base b , determinar un plano paralelo a la generatriz de modo que el segmento parabólico que resulta en la sección tenga área máxima.

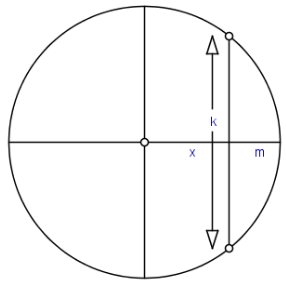


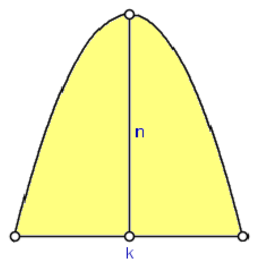


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{a}{n} = \frac{b}{b - m} \quad \rightarrow \quad n = \frac{a}{b} \cdot (b - m)$$

La sección que determina el plano paralelo es una parábola:





Vista cenital

Si k es la cuerda perpendicular al diámetro a una distancia m del extremo, y (x,y) es uno de sus extremos:

$$\left.\begin{array}{r} x = b - m \\ x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad k = 2y = 2\sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(\frac{b}{2} - m\right)^2} = 2\sqrt{bm - m^2}$$

Se deduce fácilmente que la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$, $(0,n)$ y $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ es $y = n - \frac{4n}{k^2}x^2$ (se recomienda repasar la ecuación de la parábola).

El área de esta sección es:

$$S = \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} y(x)dx = \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \left(n - \frac{4n}{k^2}x^2\right)dx = \left[n \cdot x - \frac{4n}{k^2}\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} =$$

$$= \left(n\frac{k}{2} - \frac{4n}{k^2}\frac{k^3}{24}\right) - \left(-n\frac{k}{2} + \frac{4n}{k^2}\frac{k^3}{24}\right) = nk - \frac{nk}{3} = \frac{2}{3}nk$$

O sea:

$$S = \frac{2}{3}nk = \frac{2}{3}n \cdot 2\sqrt{bm - m^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{b}(b-m) \cdot \sqrt{bm - m^2}$$

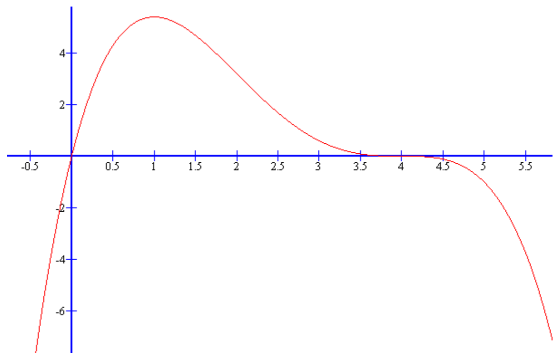
Como el área es una cantidad >0, el máximo de esta función coincidirá con el de su cuadrado, que es la función:

$$f(m) = S^2 = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (b-m)^2 \cdot (bm - m^2) = \frac{16a^2}{9b^2} \cdot m \cdot (b-m)^3$$

Que tiene por derivada:

$$f'(m) = \frac{16a^2}{9b^2} \cdot \left(1 \cdot (b-m)^3 + m \cdot 3(b-m)^2 \cdot (-1)\right) = \frac{16a^2}{9b^2} \cdot (b-m)^2 (b-4m)$$

Que se anula en: $m = b$ y $m = \frac{b}{4}$. Al ser *f(m)* una función polinómica de 4º grado con coeficiente de su término de mayor grado negativo y raíces *m=0* simple y *m=b* triple, su gráfica es (en la representación se ha considerado b=4):



donde se ve claramente que el máximo se obtiene en $m = \frac{b}{4}$.