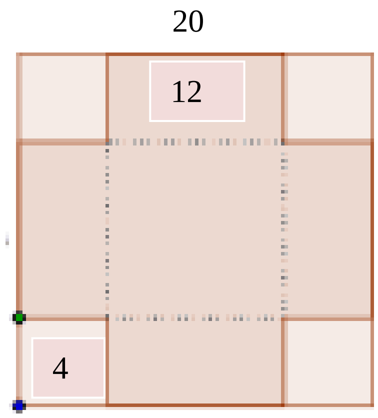
RALLYEMATHÉMATIQUE SANS FRONTIÈRES

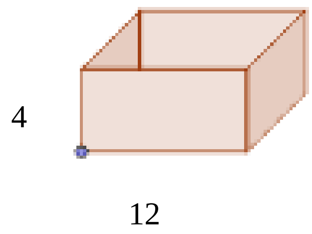
SOLUCIONES

PRUEBA

2008

1- Mise en boîte! /Make the box!





El volumen del paralelepípedo es:

$$V = 12^2 \cdot 4 = \mathbf{576\ cm^3}$$

2 – ¡Dad, amigos!

<u>Por descomposición</u>

Llamamos x al número de alumnos:

$$300 < x < 400$$

Al repartir 2793 lapiceros entre x alumnos sobran 17 por lo que:

$$2793 - 17 = \dot{x}, \text{ (múltiplo de x)}$$

luego

$$2776 = \dot{x}$$

De igual manera, al repartir 707 gomas entre x alumnos se tiene:

$$707 - 13 = x^{\cdot} \quad \text{(múltiplo de x)}$$

Luego

$$694 = \dot{x}$$

Descomponemos en producto de factores primos:

$$2776 = 2^3 \cdot 347$$

$$694 = 2 \cdot 347$$

Como x tiene que ser divisor común de 2776 y 694 comprendido entre 300 y 400, sólo puede ser x=347

a) El total de alumnos es 347.

b) $\frac{2793-17}{347} = \mathbf{8} \quad \boldsymbol{lapiceros\ a\ cada\ alumno}$

c) $\frac{707-13}{347} = \mathbf{2}$ $\quad \boldsymbol{gomas\ a\ cada\ alumno}$

<u>Por acotación</u>

Llamamos x al número de alumnos:

$$300 < x < 400$$

Luego el número de gomas repartidas a cada alumno (G) estará comprendido entre:

Llamamos x al número de alumnos:

$$\frac{707-13}{400} < G < \frac{707-13}{300}$$

Esto es:

$$1{,}735 < G < 2{,}313$$

Luego, al ser G un número entero se tiene que G=**2 gomas recibe cada alumno**

A partir de este dato, el número de alumnos será:

$$2x + 13 = 707$$

De donde se obtiene que el **número de alumnos es x=347**

El número de lápices que recibe cada alumno será:

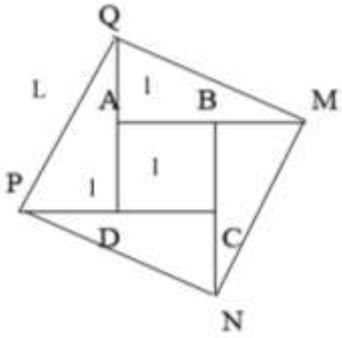
$$347 \cdot L + 17 = 2793$$

Obteniéndose que **cada alumno recibe L= 8 lápices**

3 – Tomad un poco de "áreas"

En el triángulo rectángulo PQD, al ser A punto medio de [QD]:

$$L = \sqrt{l^2 + (2l)^2} = \sqrt{5}\, l$$



Comparando áreas:

Área del cuadrado pequeño: $S_{ABCD=}\ l^2$

Área del cuadrado grande: $S_{MNPQ} = L^2 = \left(l\sqrt{5}\right)^2 = 5\, l^2$

La razón de áreas es $\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{l}} = \frac{5\, l^2}{l^2} = \mathbf{5}$

4 – El siguiente, por favor…

1) El primer sucesor , al ser 2008 par será : $\frac{2008}{2} = \mathbf{1004}$

   El segundo sucesor, al ser 1004 de nuevo par es: $\frac{1004}{2} = \mathbf{502}$

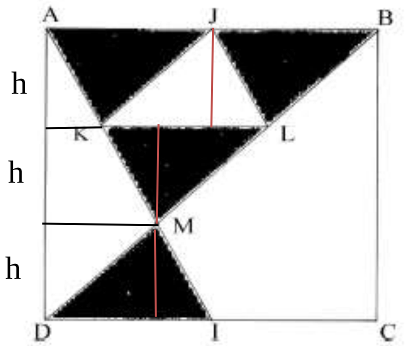
   El tercer sucesor, al ser otra vez 502 par será: $\frac{502}{2} = \mathbf{251}$

   El cuarto sucesor, al ser 251 impar es: $5 \cdot 251 + 3 = \mathbf{1258}$

2) 2008X2=**4016** es un número par cuyo sucesor sería su mitad luego 2008

   $\frac{2008-3}{5} = \mathbf{401}$ es un número impar cuyo sucesor sería el número multiplicado por 5 más 3, es decir 2008

5 – ¡Id al grano!



Completando el triángulo

Lo primero que vamos a probar es que los cuatro triángulos negros y el triángulo blanco ΔJLK son iguales.

$AJ = JB = DI$ por ser J punto medio de [AB] y I punto medio de [CD]. Además, se prueba por Tales que $AJ = JB = DI = KL$ ya que ($\frac{KL}{AB} = \frac{KM}{AM} = \frac{1}{2}$; luego $KL = \frac{AB}{2} = 10$)

Por lo que KM mide lo mismo que $AJ, JB\ y\ DI$

Todos esos segmentos constituyen la base horizontal de todos los triángulos negros que mide 10 m.

Por Tales también se puede probar que coinciden: $AK = JL$ puesto que ($\frac{AM}{JL} = \frac{AB}{JB} = 2$

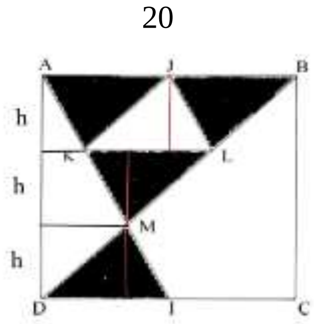
Por lo que $AM = 2JL = 2AK$, de donde $JL = AK$

De igual manera se prueba que: $BL = LM = KJ$. Así obtenemos que los triángulos negros superiores son iguales por tener los lados paralelos o alineados (semejantes) y los lados correspondientes tener la misma longitud.

Finalmente, el triángulo ΔDMI tiene dos lados que son prolongación de los otros triángulos y el tercer lado horizontal por lo que sería semejante a los otros triángulos negros. Como además tiene uno de los lados igual, DI, los otros dos lados correspondientes serán iguales.

Podemos entonces completar el triángulo ΔABM sustituyendo el triángulo blanco ΔJLK por el negro inferior ΔDMI.

El problema se reduce a hallar el área del triángulo ΔABM de base 20m. Su altura será 2h puesto que en la descomposición en triángulos correspondería a la suma de alturas del triángulo $\Delta KJL \; y \; \Delta KLM$. Como los triángulos negros y el blanco ΔKJL eran iguales y por tanto tienen la misma altura h, nuestro triángulo tendrá como altura 2h.



Por otro lado, el lado del cuadrado grande que mide 20 es: 20=3h, de donde: $h = \frac{20}{3}$

El área será:

$$S_{ABM} = \frac{20 \cdot 2h}{2} = 20h = 20 \cdot \frac{20}{3} = \frac{400}{3}\ m^2$$

El número de gramos será $15 \cdot \frac{400}{3}$ = 2000 g = **20Kg**

<u>Sumando áreas de triángulos</u>

Una vez probado como en el otro caso que los cuatro triángulos negros y el blanco ΔKJL son iguales, y que la altura de cada uno de ellos es $h = \frac{20}{3}$

Basta con hallar el área de uno de los triángulos pequeños:

$$S = \frac{10 \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot \frac{20}{3}}{2} = \frac{100}{3} m^2$$

El área buscada será cuatro veces S: $\frac{100}{3} \cdot 4 = \frac{400}{3}$

El número de gramos será $15 \cdot \frac{400}{3}$ = 2000 g = **20Kg**

6- A la búsqueda del número perdido

Llamamos x al número perdido: $1 \leq x \leq 19$.

Podemos considerar la progresión aritmética de razón 1: 1, 2, 3, …19

La suma total de los 19 números es:

$$S_T = \frac{1 + 19}{2} \cdot 19 = 190$$

La suma de los 18 números que quedan sin el que se ha perdido (x) sería 190-x, por lo que la media es

$$\frac{190 - x}{18} = \frac{31}{3}$$

De donde 190-x=186, por lo que **x=4**

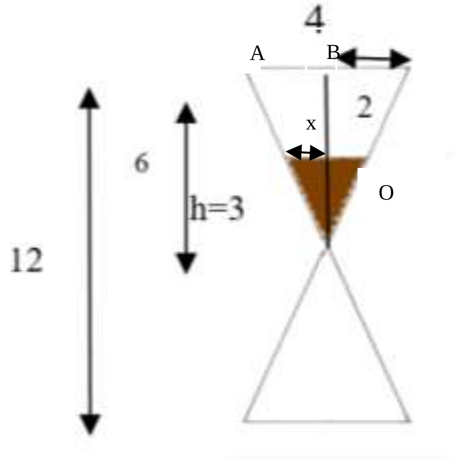
Especial Tercero de ESO

7– Y los Shadoks pedaleaban, pedaleaban…

El espacio que debe recorrer es $1000m + 900m = 1{,}9\ Km$ pues todo el tren debe estar fuera del túnel.

Como la velocidad es 9,5 Km/h , $9{,}5 = \frac{1{,}9}{t}$, de donde $t = \frac{9{,}5}{1{,}9} = 0{,}2\ horas = \mathbf{12\ minutos}$

8 -El tiempo se acaba



En el triángulo ΔABO **aplicamos Tales:**

$\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}} = \frac{6}{3}$, luego x=1

Aplicamos la fórmula del volumen correspondiente a la arena:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = \pi\ cm^3$$

Al ser la velocidad de 2,4 $cm^3/minuto$,el tiempo que tardará en caer será:

$$\frac{\pi}{2{,}4} \approx 1{,}309\ minutos \approx 1'18{,}54'' = \mathbf{78{,}54\ segundos} \approx \mathbf{79\ segundos}$$

Especial Cuarto de ESO

7. – Idas y vueltas

Llamamos t al tiempo que tarda el ciclista en la ida por lo que el tiempo que tarda en la vuelta será 5-t. Como conocemos las velocidades, se tiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{t} = 23 \\ \dfrac{x}{5-t} = 27 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x = 23\text{ t} \\ x = 27 \cdot (5 - t) \end{cases}$$

$$23t = 27 \cdot (5 - t)$$

$$23t = 13\,5 - 27t$$

$$t = \frac{135}{50} = 2{,}7\ horas$$

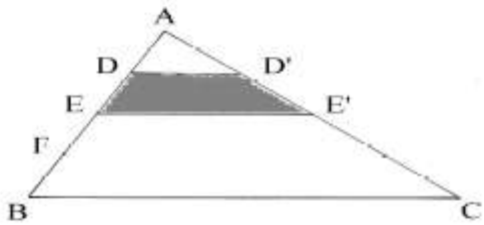
Por lo que la distancia de la ida será:

$$x = 23 \cdot 2{,}7 = 62{,}1\ km$$

Y la distancia total, el doble: **124,2 km**

8– Del trapecio al triángulo

La razón de lados $\frac{AB}{AE} = 2$, luego la razón de áreas será la razón al cuadrado:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEE'}} = 2^2 = 4$$

Por lo tanto, $S_{ABC} = 4 \cdot S_{AEE'}$

Por otro lado, $S_{AEE'} = S_{ADD'} + S_{DD'EE'}$

De igual manera, $\frac{AE}{AD} = 2$, luego la razón de las áreas será

$$\frac{S_{AEE'}}{S_{ADD'}} = 2^2 = 4$$

Por lo que $S_{AEE'} = 4 \cdot S_{ADD'}$

Como el área del trapecio es 12 cm^2, es decir $S_{DD'EE'} = 12$, según los resultados anteriores

$$S_{AEE'} = 4 \cdot S_{ADD'} = S_{ADD'} + S_{DD'EE'} = S_{ADD'} + 12$$

Luego $3 \cdot S_{ADD'} = 12$, $S_{ADD'} = 4$, por lo que $S_{AEE'} = 4 \cdot S_{ADD'} = 16$

Así obtenemos que **el área buscada** es: $S_{ABC} = 4 \cdot S_{AEE'} = \mathbf{64\ cm^2}$