Taller 20 mayo 2022

Matemáticas con las manos y con la cabeza: “Geometría conPlot”. Florencio Villarroya

0.- Introducción.

En este taller se presenta a los participantes el material PLOT (Poitiers, Limoges, Orléans, Tours) iniciales de las cuatro ciudades que a través de la APMEP (asociación de profesores de matemáticas de la enseñanza pública) de Francia.

Este material consiste en la familia de polígonos regulares más conocidos y que nos llevarán a construir los poliedros regulares, los deltaedros y los prismas y antiprismas.

A partir de aquí utilizamos sólo la palabra polígono para referirnos a los polígonos regulares y no ser reiterativos en el lenguaje.

1.- Primeros pasos.

La sesión empieza repartiendo a diferentes grupos diferentes polígonos, de manera que a unos se le entregan triángulos, a otros cuadrados, a otros pentágonos y a otros hexágonos.

Los que tienen pentágonos, enseguida construyen el dodecaedro, que lo reconocen.

Lo mismo sucede con los que tienen cuadrados, construyen un cubo.

De los que tienen hexágonos, empiezan a enlazarlos y no ven que sale un plano. Momento que aprovecho para decirles que … además de las manos hay que usar la cabeza. Pensar cuál es la medida de cada ángulo interior del hexágono y caer en la cuenta que como suman 360º, lo que están construyendo es un embaldosado plano y no una figura en el espacio.

A los que tienen cuadrados se les pregunta si podrán poner cuatro juntos en un mismo punto, a lo que la respuesta es no, pues estaríamos haciendo embaldosados planos y lo que en este taller se pretende es construir poliedros en el espacio.

Entre los que tienen triángulos hay más variedad. Algunos se conforman con construir un tetraedro (dicen que no se les ocurre otra cosa), pero otros construyen el icosaedro, y alguno el octaedro. Pero también en algún grupo hacen otro tipo de enlaces, es decir que no todos los vértices reúnen el mismo número de caras.

Momento de recapitulación, aparecen aquí los cinco poliedros regulares conocidos, pero además otros más raros.

2.- Poliedros regulares

Si nos centramos en los regulares, les pido que cuenten caras, vértices y aristas de cada uno de ellos, pero indicando que a partir del número de caras C, se puede calcular el número de aristas A, pues en cada poliedro, sabiendo el número de caras, se juntan dos en una arista, por lo que, por ejemplo, para el dodecaedro que tiene doce caras, el número de aristas se obtiene de la fórmula $A = 5.\ 12 / 2 = 30$. Para el mismo dodecaedro, el número de vértices V, también se obtiene a partir de C, puesto que concurren tres caras en cada vértice, ahora la fórmula es por tanto V = 5. 12 / 3 = 20.

Las mismas fórmulas sirven para los demás.

Les pregunto si han oído la palabra Teo …., alguno contesta que teoría, les digo que busco otra: Teorema, que la gran mayoría dice desconocer, para mi sorpresa pues creo que todos han estudiado ya el teorema de Pitágoras.

Entonces intento que entre todos enunciemos **un teorema:**

“Sólo existen cinco poliedros regulares”

Y les digo que eso exige una demostración, ya que todos los teoremas necesitan una demostración, o al menos una conjetura sobre la misma, para empezar.

La demostración se desarrolla más o menos así, con cuadrados sólo se puede construir un cubo, pues la única construcción posible espacial concurriendo tres de ellos en un vértice, con dos es imposible y con cuatro hacemos un embaldosado plano.

Con el pentágono, nunca se pueden juntar cuatro. Por tanto solo hay un poliedro con caras pentagonales.

Con el hexágono, no se puede construir nada en el espacio, sólo sale el embaldosado.

Con polígonos de más lados, evidentemente, es imposible pues el ángulo interior es cada vez mayor, al aumentar el número de lados.

Con triángulos hay más posibilidades: Concurriendo tres triángulos en un vértice hay un único poliedro de cuatro caras, tetraedro (o pirámide triangular, para otros).

Concurriendo cuatro, tenemos el octaedro de ocho caras, y concurriendo cinco el icosaedro de veinte caras.

Demostración terminada.

3.- Observación.

Creo que es muy importante que en las clases de matemáticas se demuestren la mayoría de los enunciados que se dan, pues sino, pasa de ser una ciencia a ser una creencia (es así porque lo dice nuestra/o profesor/a.

Aprovecho para decirles que los nombres vienen de la lengua griega clásica, con pequeñas variaciones y que en casi ninguna lengua se han traducido a cuatrocaras, o veintecaras, etc. lo que permite que el lenguaje matemático sea más universal.

4.- Hacia el teorema de Descartes. (por supuesto, sin nombrarlo)

A continuación se les pide hacer una observación, sobre los grados que faltan en cada vértice.

Por ejemplo, en el cubo faltan 90º, y si contamos lo que falta en total entre los ocho vértices:

8 . 90º = 720º

En el pentágono, hay que recordar lo que mide su ángulo interior, 108º, por tanto al juntar tres, tenemos 324º, por tanto faltan 36º, como hay 20 vértices:

20 . 36º = 720º.

En el tetraedro, que junta tres triángulos 180º, faltan otros 180º, por tanto como hay cuatro vértices:

4 . 180º = 720º.

En el octaedro que junta cuatro, faltan 120º, como hay 6 vértices:

6. 120º = 720º

En el icosaedro, juntando cinco en cada vértice, faltan 60º, como hay 12 vértices, también tenemos

12. 60º = 720º.

Con lo que tenemos un hecho notable, que se puede comprobar en los casos citados y en los que veremos más adelante, sin llegar a una demostración formal, pero es un importante resultado de la geometría de los poliedros que es el TEOREMA DE DESCARTES.

5.- Deltaedros.

Vuelvo a buscar a los grupos que han hecho otras figuras con triángulos, una de ellas es muy bonita, es la que reúne en el vértice superior 5 triángulos, lo mismo en el inferior, pero en la parte central de la figura sólo concurren cuatro triángulos, es un poliedro de diez caras triangulares, en la que las aristas se cuentan o se calculan por la fórmula anterior

A = 3 . 10 / 2 = 15

Y los vértices es más fácil contarlos que calcularlos, 7. El nombre coloquial de esta figura es “platillo volante”.

Hay otro grupo que construye un poliedro con 14 caras triangulares. Entonces de nuevo se pueden contar, aunque es un poco más difícil, caras vértices y aristas, pero en los vértices hay que distinguir que puede haber de dos tipos, tres, cuatro o cinco triángulos.

Voy a la pizarra y hago con la ayuda de los asistentes una tabla con todos los poliedros que están formados por caras triangulares, incluidos los regulares y excluidos los que no son convexos, pues de éstos hay infinitos y nos quedamos sólo con los convexos.

A medida que se va construyendo la tabla con los poliedros construidos, se ve la relación numérica entre caras, aristas y vértices, cada vez que se añaden dos triángulos, se aumenta un vértice, dos caras y tres aristas, por tanto la elaboración de la tabla sirve para a partir de ella pensar cuántos elementos tiene el siguiente.

	Caras	Aristas	Vértices (por el nº de caras unidas)			V total
			3	4	5	
Tetraedro	4	6	4			4
Bipirámide triangular	6	9	2	3		5
Octaedro	8	12		6		6
Platillo volante	10	15		5	2	7
	12	18		4	4	8
	14	21		3	6	9
	16	24		2	8	10
Icosaedro	20	30			12	12

La sorpresa, que en el taller no se pudo explicar es que se espera que haya uno de 18 caras, pero exigiría, de acuerdo con la tabla … Lo dejo para que quien quiera lo piense.

6.- Antiprismas.

Cojo un icosaedro y un platillo volante y los comparo, lo que les hace ver que si cortamos del icosaedro dos pirámides pentagonales, con ellas se construye el platillo volante y nos queda una figura formada por dos pentágonos (situados en planos paralelos) y si se cuentan otra vez, 10 triángulos. Nace así el primer poliedro de una familia que si será infinita, es la de los poliedros semirregulares.

Les hago contar caras, aristas y vértices y las llevamos a una tabla, viendo de nuevo que se pueden calcular, si miramos desde el pentágono de arriba "cuelgan 5 triángulos", y lo mismo desde el de abajo, todos los vértices son iguales, concurren en ellos un pentágono y tres triángulos. Las aristas, como en los poliedros regulares, porque cada arista (gomilla) siempre une dos caras. Los vértices son los de los dos pentágonos.

Ahora, solo con la cabeza, pensamos que se puede sustituir la pareja de pentágonos por hexágonos, lo que nos da el antiprisma 6, o un octógono, o un decágono, o un polígono de n lados (con n mayor o igual a 4, en la generalización).

	Caras		C total	Aristas	Vértices	
	Distinta	Triángulos				
Antiprisma 5	2 de 5	10	12	20	10	
Antiprisma 6	2 de 6	12	14	24	12	
Antiprisma 8	2 de 8	16	18	36	16	
Antiprisma 10	2 de 10	20	22	40	20	
Antiprisma n	2 de n	2.n	2.n + 2	4.n	2.n	

Y aquí ya se puede conjeturar la famosa fórmula de Euler

CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + DOS.

7.- Prismas.

Observamos que, los polígonos que forman las bases de los antiprismas están girados uno respecto del otro, podemos pensar en colocar dos polígonos iguales paralelos y unirlos con cuadrados. Con lo que podemos elaborar una tabla como la anterior

	Caras		C total	Aristas	Vértices	
	Distinta	Cuadrados				
Prisma 5	2 de 5	5	7	15	10	
Prisma 6	2 de 6	6	8	18	12	
Prisma 8	2 de 8	8	10	24	16	
Prisma 10	2 de 10	10	12	30	20	
Prisma n	2 de n	n	n + 2	3.n	2.n	

Y de nuevo se puede ver que se cumple la fórmula de Euler

$$\mathbf{C + V = A + 2}$$

Ya no hubo tiempo de más, pero se podía haber seguido volviendo a los poliedros regulares y deltaedros para comprobar que también cumplen la fórmula de Euler, por lo que esta fórmula pasaría a la categoría de Teorema, del que no damos una demostración general (difícil para esta edad de los participantes), pero si una general para dos familias de infinitos miembros.

8.- Conclusión.

Se puede trabajar en matemáticas cuestiones tales como enunciar propiedades, intentar demostrarlas, generalizar, todo ello trabajando a la vez o alternando, las manos y la cabeza.