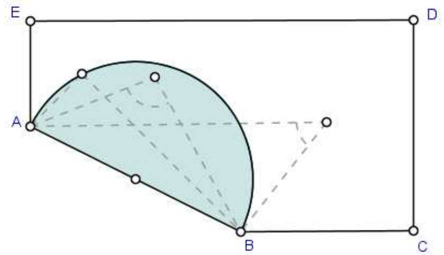
Taller de Talento Matemático
Zaragoza, 28 febrero 2020
Josep Rochera Gaya

PROBLEMAS GEOMETRICOS. SOLUCIONES

Probabilidad

1. Se selecciona al azar un punto P del interior del pentágono de vértices A(0,2), B(4,0), C(2π+1,0), D(2π+1,4) y E(0,4). ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo ∠APB sea obtuso?



Los puntos P cuyo ángulo APB sea obtuso deben ser interiores a la circunferencia de diámetro AB. La probabilidad buscada será el cociente entre las áreas de las regiones favorable (semicírculo) y factible (pentágono).

$$AB = 2\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad p(\angle APB\, obtuso) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2}{(2\pi+1)\cdot 4} = \frac{5\pi}{16\pi+8}$$

2. A, B son dos puntos de una circunferencia C de radio r, tales que la cuerda AB vale r . Se elige al azar un punto P del círculo, hallar la probabilidad de que el triángulo ABP sea acutángulo si:

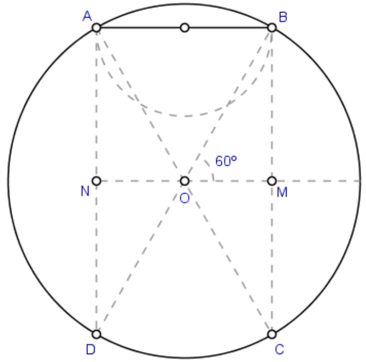
(a) P está en la circunferencia.

(b) P es un punto del interior del círculo.

(a) El arco AB es de 60º (al ser AB=r es el lado del hexágono inscrito), entonces, si P es un punto de la circunferencia, APB será igual a 30º o bien 150º dependiendo si está entre A y B en el arco inferior o en el superior. Y los ángulos A y B serán también agudos si P está entre Cy D (diametralmente opuestos a A y B).

La probabilidad será, pues:

$$p(APB\, acutángulo) = \frac{\frac{60}{360}\cdot 2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{6}$$



(b) P tendrá que ser exterior a la circunferencia con diámetro AB y estar a la derecha de AD y a la izquierda de BC. Así el área de la región favorable será igual a sector OCD + 2·OMC + rectángulo ABMN - semicírculo AB:

$$S = \frac{60}{360}\cdot\pi r^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot r}{2} + r\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot r}{2} - \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot r^2 + \frac{1}{24}\cdot\pi r^2 = \frac{18\sqrt{3}+\pi}{24}\cdot r^2$$

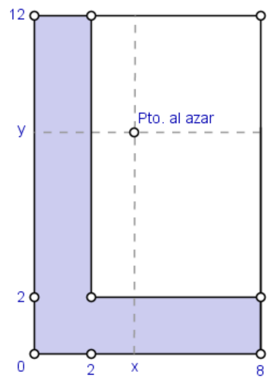
Y la probabilidad, en este caso, es:

$$p(PAB\, acutángulo) = \frac{\frac{18\sqrt{3}+\pi}{24}\cdot r^2}{\pi\cdot r^2} = \frac{18\sqrt{3}+\pi}{24\cdot\pi}$$

3. En Holecity, debido al tráfico, los autobuses no consiguen cumplir los horarios establecidos aunque logran mantener sus frecuencias de paso. En una parada de autobús paran los autobuses de las líneas A y B con frecuencias respectivas de 8 y 12 minutos. Si llegamos a la parada en un momento cualquiera, calcular la probabilidad de que:

(a) Pase un autobús (A o B) antes de 2 minutos.

(b) El primer autobús que pase sea de la línea A.

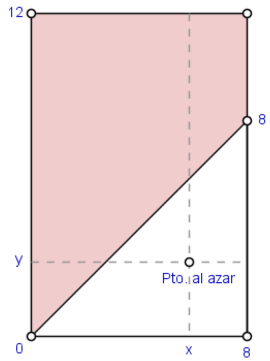


(a) Nuestro problema se puede modelizar con un rectángulo 8x12 en el que la abscisa de un punto es el tiempo que tarda el autobús A en llegar a la parada, y su ordenada el tiempo que tarda el B.

La región que nos es propicia es la de aquellos puntos en las que una cualquiera de sus coordenadas sea menor que 2, pues no nos importa si es A o B quien llegue primero. Así:

$$p\left(x<2\ o\ y<2\right) = \frac{8\cdot 2+10\cdot 2}{8\cdot 12} = \frac{36}{8\cdot 12} = \frac{3}{8}$$

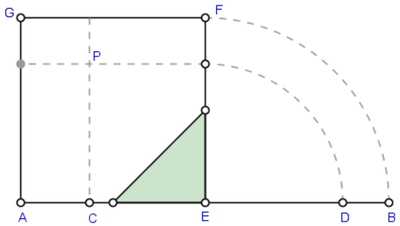
(b) En este caso, la situación es algo diferente, la región que nos es favorable es ahora:



Por lo que la solución será:

$$x<y \quad\rightarrow\quad p\left(x<y\right) = 1-\frac{\frac{8\cdot 8}{2}}{8\cdot 12} = 1-\frac{4}{12} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

4. En el segmento AB, E es el punto medio. Se eligen, al azar, un punto C del segmento AE, y otro D de EB. ¿Cuál es la probabilidad de que CD sea menor que la cuarta parte de AB?



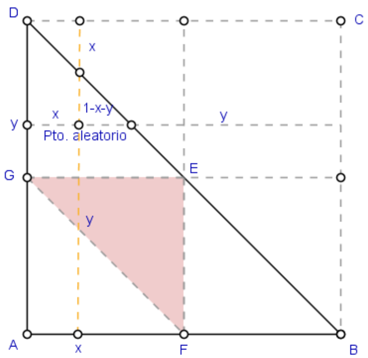
Podemos suponer que la barra mide 2 unidades, elegir dos puntos en los segmentos equivale a elegir un punto en el interior del cuadrado AEFG.

Si AC=x , CE=1-x , ED=PC=y . Por lo que P será un punto favorable si

$$1-x+y<\frac{\overline{AB}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad y<x-\frac{1}{2}$$

que es la región sombreada de la figura, con lo que: $p\left(\overline{CD}<1/4\right)=\dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}}{1}=\dfrac{1}{8}$

5. Una barra se rompe al azar en dos puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que con las tres partes resultantes se pueda formar un triángulo?



Aparentemente el problema es de tres dimensiones, pues hay tres trozos. Pero el tercer trozo queda perfectamente determinado por la medida de los dos primeros, luego es de dos variables.

Para simplificar consideraremos que la barra mide 1 unidad, así sólo tenemos que determinar dos puntos del intervalo (0,1). Si x, y es lo que miden los dos primeros trozos, el tercero medirá 1-x-y. Las restricciones que tenemos en el problema son:

$$0<x<1 \quad , \quad 0<y\le 1-x$$

La región “factible” que represente todos los posibles casos será el triángulo rectángulo con catetos de 1 unidad. Cada punto de éste, junto con el correspondiente de la diagonal con su misma abscisa (u ordenada) divide el segmento [0-1] en tres partes.

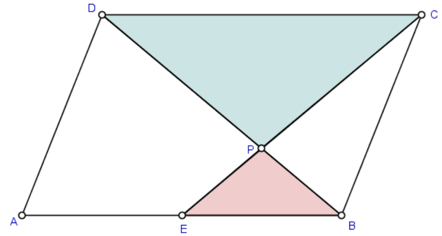
Para que se pueda formar un triángulo con los tres trozos se tiene que verificar la desigualdad triangular, por lo que ninguno puede ser mayor de 0’5 (pues sería mayor que la suma de los otros dos), así:

$$x\le\frac{1}{2} \quad , \quad y\le\frac{1}{2} \quad , \quad 1-x-y\le\frac{1}{2}$$

Siendo esta última $y\ge\frac{1}{2}-x$. Por lo que la región de los casos que nos son favorables es el triángulo EFG, por eso: $p\left(formar\ triángulo\right)=\dfrac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{S_{\triangle EFG}}{4\cdot S_{\triangle EFG}}=\dfrac{1}{4}$

Sangakus

6. ABCD es un paralelogramo, E el punto medio del lado AB, y P el punto intersección de BD con CE. Hallar el área de las regiones que determinan dichos segmentos en el paralelogramo.



Los triángulos BPE y CDP son semejantes. Dado que EB es la mitad de CD, los demás lados y las alturas de estos triángulos guardan la misma proporción. Entonces:

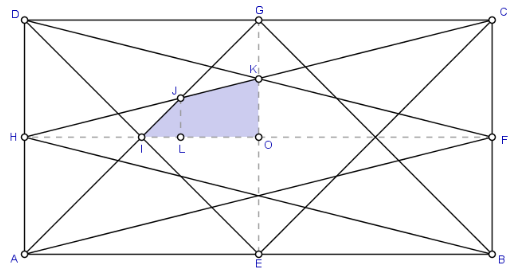
$$S_{EBP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{3}=\frac{b\cdot h}{12}=\frac{S_{ABCD}}{12}$$

$$S_{CDP}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{2h}{3}=\frac{b\cdot h}{3}=\frac{S_{ABCD}}{3}$$

$$S_{EBP}+S_{BPC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot h=\frac{b\cdot h}{4} \rightarrow S_{BPC}=\frac{b\cdot h}{4}-\frac{b\cdot h}{12}=\frac{b\cdot h}{6}=\frac{S_{ABCD}}{6}$$

$$S_{AEPD}=S_{ABCD}-(S_{EBP}+S_{BPC}+S_{CPD})=b\cdot h\cdot\left(1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5\cdot S_{ABCD}}{12}$$

7. En el rectángulo ABCD se trazan los segmentos que unen cada vértice con los puntos medios de los lados opuestos. Calcular el área del octógono que determinan.



Sea: $a=AB$, $b=AD$. Utilizando triángulos semejantes se obtiene:

$$HI=\frac{a}{4} \quad , \quad OK=\frac{b}{4}$$

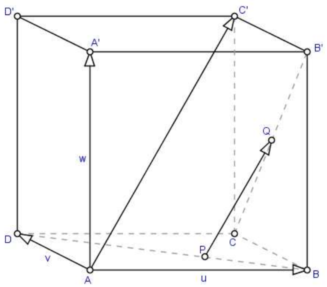
$$HIJ\sim GJC \rightarrow HC=3\cdot HJ$$

$$HJL\sim HCF \rightarrow JL=\frac{b}{6}$$

$$S_{IJKO}=S_{HKO}-S_{HJI}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{b}{6}=\frac{a\cdot b}{24} \rightarrow S_{octógono}=4\cdot S_{IJKO}=\frac{a\cdot b}{6}$$

8. En el cubo ABCDA'B'C'D' se consideran las diagonales de dos caras contiguas BD y CB'. Hallar dos puntos de estas diagonales que determinen un vector paralelo a la diagonal AC' del cubo.

Los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AA'}$ son linealmente independientes. Expresaremos los vectores $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{PQ}$ respecto de éstos:



$$\overrightarrow{BP}=\alpha\cdot\overrightarrow{BD}=\alpha\cdot\left(-\vec{u}+\vec{v}\right)$$
$$\overrightarrow{CQ}=\beta\cdot\overrightarrow{CB'}=\beta\cdot\left(-\vec{v}+\vec{w}\right)$$
$$\overrightarrow{AC'}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$$

Dado que los vectores $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos, tienen la misma dirección, por lo que:

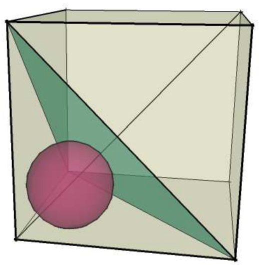
$$\overrightarrow{PQ}=\lambda\cdot\overrightarrow{AC'}=\lambda\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)$$
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{BP}+\vec{v}+\beta\cdot\left(-\vec{v}+\vec{w}\right)=\alpha\cdot\left(-\vec{u}+\vec{v}\right)+\beta\cdot\left(-\vec{v}+\vec{w}\right)=\alpha\cdot\vec{u}+\left(1-\alpha-\beta\right)\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}$$

Luego:

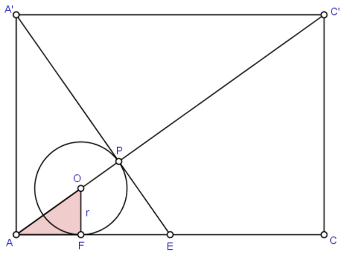
$$\left.\begin{array}{r}\alpha\quad=\lambda\\ 1-\alpha-\beta=\lambda\\ \beta=\lambda\end{array}\right\}\rightarrow 1-\lambda-\lambda=\lambda \rightarrow 1=3\lambda \rightarrow \lambda=\frac{1}{3} \rightarrow \alpha=\beta=\frac{1}{3}$$

O sea, P es el punto que divide a BD en la tercera parte, al igual que CQ lo hace con CB'.

9. En el cubo ABCDA'B'C'D' se considera el plano BA'D. Calcular el radio de la esfera inscrita al cubo y a este plano en la esquina del vértice A.



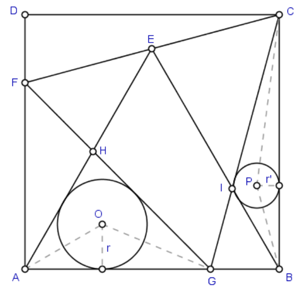
Cortando el cubo por los vértices ACC'A' se obtiene la sección:



Consideremos que la arista del cubo sea igual a la unidad, por el problema 8 AC'=3·AP , entonces:

$$AC=\sqrt{2} \rightarrow AC'=\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}=\sqrt{3} \rightarrow AP=\frac{1}{3}AC'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-r\right)^2=r^2+\left(\sqrt{2}\cdot r\right)^2 \rightarrow \frac{1}{3}+r^2-\frac{2}{\sqrt{3}}r=3\cdot r^2$$
$$6r^2+2\sqrt{3}r-1=0 \rightarrow r=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6} \rightarrow (r>0)\quad r=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

10. En el cuadrado ABCD de lado a, se traza el triángulo equilátero ABE, y CE se prolonga hasta encontrar AD en F. Probar que se puede encontrar un punto G en AB tal que CFG sea equilátero. Sea H el punto intersección de AE con FG, e I de BE con CG, probar que el radio r del círculo inscrito a AHG es el doble de r', radio del círculo inscrito a BCI.



Por ser ABE equilátero, el ángulo ∠BAE=60º y ∠EBC=30º, y por ser EB=AB=BC, EBC es isósceles, luego:

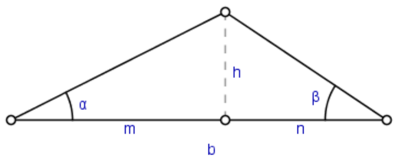
∠BEC=∠ECB=75º, de donde ∠FCD=15º

Si G es el punto de AB tal que ∠GCB=15º, el triángulo FGC será isósceles en C, por lo que ∠CFG=∠FGC=α y ∠FCG=75º-15º=60º. Por lo tanto:

α+α+60º=180º → α=60º

y FCG es equilátero.

Calcularemos los radios de los círculos inscritos como las alturas de los triángulos AOG y BPC. Vamos a deducir una fórmula para no repetir operaciones:



$$\left.\begin{array}{l}\tan\alpha=\dfrac{h}{m}\\ \tan\beta=\dfrac{h}{b-m}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}m=\dfrac{h}{\tan\alpha}\\ \tan\beta\cdot\left(b-\dfrac{h}{\tan\alpha}\right)=h\end{array}\right\}$$

$$\tan\beta\cdot\left(b\cdot\tan\alpha-h\right)=h\cdot\tan\alpha \rightarrow h=\frac{b\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

Como ∠GAE=60º , ∠EBC=30º y ∠BCG=15º, tendremos que ∠GAO=30º , ∠PBC=15º y ∠PCB=7'5º. Además FAG es isósceles y rectángulo, luego ∠AGF=45º y ∠AGO=22'5º.

Entonces, como GB= a·tan15º :

$$r=\frac{a\cdot\left(1-\tan 15^{o}\right)\cdot\tan 30^{o}\cdot\tan 22'5^{o}}{\tan 30^{o}+\tan 22'5^{o}}\quad,\quad r'=\frac{a\cdot\tan 15^{o}\cdot\tan 7'5^{o}}{\tan 15^{o}+\tan 7'5^{o}}$$

Utilizando las fórmulas de trigonometría, se obtiene:

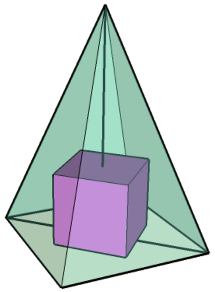
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+cos\alpha}}\quad,\quad\cos 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\tan 15^{o}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$\cos 45^{o}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\tan 22^{o}30'=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\quad,\quad\cos 15^{o}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\quad,\quad\tan 7^{o}30'=\frac{\sqrt{3}-1}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

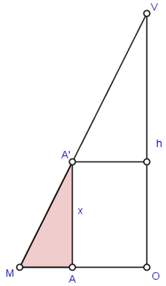
De donde, tras operar, se obtiene:

$$r=\frac{a\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}\quad,\quad r'=\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\cdot\left(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{r}{2}$$

Varia

11. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide a y su altura h. Se inscribe un cubo, apoyado sobre la base de la pirámide, y tal que cuatro de las aristas del cubo son paralelas a una diagonal de la base de la pirámide. Calcular la arista del cubo en función de a y h.

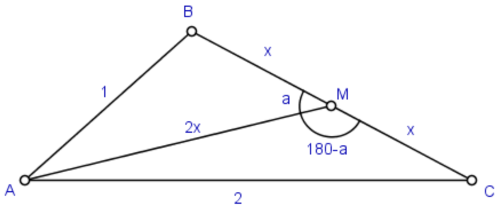




Sean ABCDA'B'C'D' los vértices del cubo, V el de la pirámide, O el centro de las bases y x la arista del cubo. Como $\overline{AC}=\sqrt{2}\,x \;\rightarrow\; \overline{AO}=\dfrac{\sqrt{2}\,x}{2} \;\rightarrow\; \overline{MA}=\dfrac{a-\sqrt{2}\,x}{2}$, de la sección de la figura que pasa por V, A' y O centro de las bases, se deduce por ser los triángulos MAA' y MOV semejantes:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MO}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OV}} \;\rightarrow\; \frac{\dfrac{a-\sqrt{2}\,x}{2}}{\dfrac{a}{2}}=\frac{x}{h} \;\rightarrow\; ah-\sqrt{2}\,xh=ax \;\rightarrow\; x=\frac{ah}{a+\sqrt{2}\,h}$$

12. En el triángulo ABC, M es el punto medio de BC. Si AB=1, AC=2 y AM=BC, calcular x=BM.

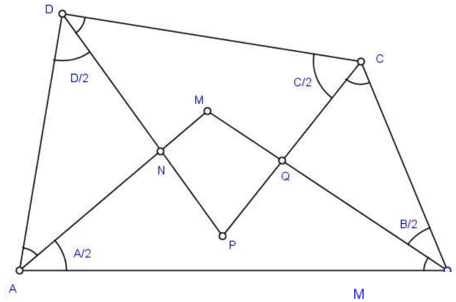


Aplicaremos el teorema del coseno a los triángulos AMB y AMC:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2=(2x)^2+x^2-2\cdot 2x\cdot x\cdot\cos\alpha \\ 2^2=(2x)^2+x^2-2\cdot 2x\cdot x\cdot\cos(\pi-\alpha)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}5x^2-4x^2\cdot\cos\alpha=1\\ 5x^2+4x^2\cdot\cos\alpha=4\end{array}\right\} \rightarrow 10x^2=5 \;\rightarrow\; x=+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

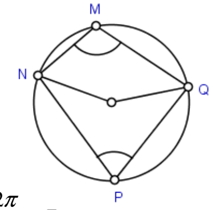
pues $x>0$.

13. En un cuadrilátero arbitrario ABCD se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices A y C con B y D son concíclicos.



$$\angle AMB=\pi-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\angle DPC=\pi-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}=\pi-\frac{\gamma+\delta}{2}$$

Si M está en la circunferencia que pasa por N, P y Q, los ángulos centrales de los arcos NMQ y QPN deben sumar 2π, luego los inscritos desde M y P sumarán π (la mitad).

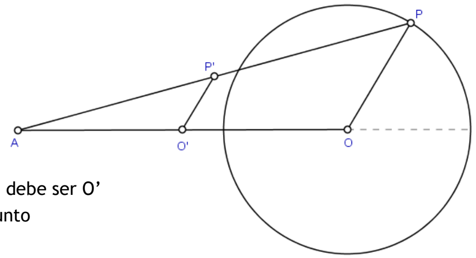


Y: $\angle AMB+\angle DPC=\pi-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\pi-\dfrac{\gamma+\delta}{2}=2\pi-\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{2}=2\pi-\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

Por lo que M, N, P y Q están sobre la misma circunferencia.

(Si M fuera exterior a la circunferencia: $\angle NMQ+\angle NPQ<\pi$, y si fuera interior sería $>\pi$).

14. Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ y un punto A exterior a ella, demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de A y un punto P genérico de $\mathscr{C}$ es otra circunferencia.



Por simetría, el centro de la nueva circunferencia debe ser O' punto medio de A y O, centro de $\mathscr{C}$. Sea P un punto cualquiera de $\mathscr{C}$ y P' el punto medio de A, P.

Por la semejanza de los triángulos AOP, AO'P':

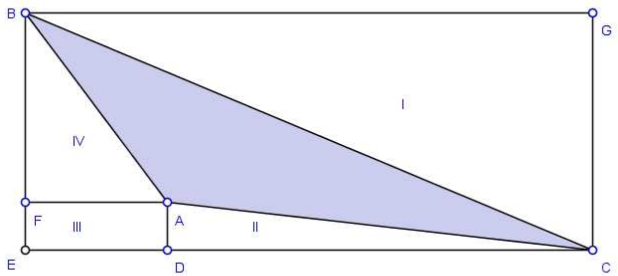
$$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{AO'}}{2\cdot\overline{AO'}}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \overline{O'P'}=\frac{\overline{OP}}{2}=\frac{r}{2}$$

Por lo que su distancia a O' es siempre constante, independientemente del punto P elegido. Luego se trata, efectivamente, de una circunferencia.

15. Demostrar que si las coordenadas de los vértices de un polígono son racionales, su área es racional.

Un polígono siempre se puede triangularizar, por lo que su área es la suma de las áreas de triángulos con vértices racionales. Así, pues, bastará con comprobar el caso para un triángulo.

Consideremos el triángulo determinado por los puntos A, B y C, y sean C, D, E, F y G de tal manera que BGCE sea el rectángulo de lados paralelos a los ejes que contiene inscrito a ABC.



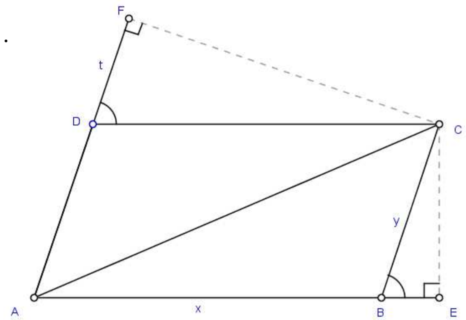
Es evidente que las coordenadas de los puntos, y las distancias BG, GC, CD, DE, EF y FB son racionales, por lo que también lo serán las áreas de BGCE, ADC, FADE, BFA y BGC.

Así, como: $S_{ABC} = S_{BGCE} - (S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV})$ también será racional S_{ABC} .

El razonamiento sirve para todas las posiciones relativas que puedan tener los puntos A, B y C.

16. Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares.

Demostrar que: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}^2$.



Sabemos que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \quad , \quad \vec{a}^2=|\vec{a}|^2$$

De $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$:

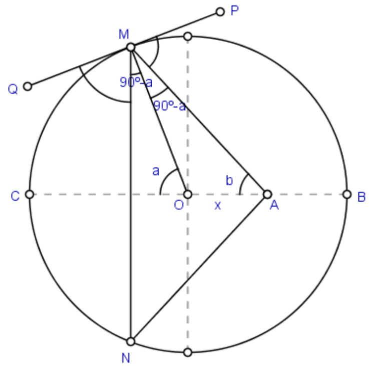
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DF}\right|=$$

$$=\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}\right)+\left(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)+\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$$

17. En un billar perfectamente circular, de radio R, se halla situada en el punto A una bola a una distancia x del centro. Se lanza sobre un punto del borde y, tras rebotar dos veces, vuelve a A. ¿Sobre qué punto se ha lanzado?

Sin pérdida de generalidad, supondremos que A está en la parte positiva del eje de abscisas y que el primer punto sobre el que se lanza la bola, M, tiene ordenada positiva. El enunciado señala implícitamente que el primer paso por A se produce en el segundo trayecto (de N hacia A), por lo que descartamos los puntos B y C (con ordenada nula).



El ángulo de incidencia es igual al reflejado, por lo que el ángulo PMA es igual a QMN, y al ser OM perpendicular a PQ, resulta que AMO=OMN. De igual manera MNO=ONA , y como OM=ON el triángulo MNO es isósceles en O tendremos:

AMN=OMN=MNO=ONA

Por lo que el triángulo AMN es isósceles en A, y MN perpendicular a AO. Así, pues, M no puede estar en el I cuadrante, pues entonces N lo estaría en el II o en el III.

Sea a el ángulo COM, 0º<a<90º. En el triángulo AMO:

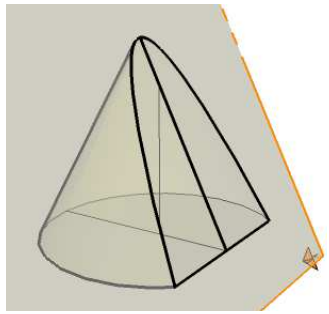
$$b+(\pi-a)+(\frac{\pi}{2}-a)=\pi \quad\rightarrow\quad b=2a-\frac{\pi}{2}$$

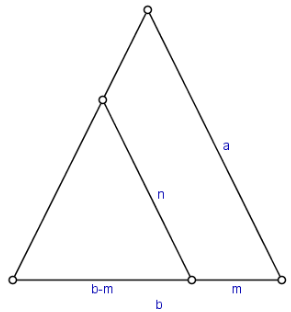
Y por el teorema de los senos:

$$\frac{x}{sen(\frac{\pi}{2}-a)}=\frac{R}{sen(2a-\frac{\pi}{2})} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{\cos a}=\frac{R}{1-2\cos^2 a}$$

$$2x\cos^2 a+R\cos a-x=0 \quad\rightarrow\quad \cos a=\frac{-R\pm\sqrt{R^2+8x^2}}{4x}$$ y, como cos a >0: $\cos a=\dfrac{-R+\sqrt{R^2+8x^2}}{4x}$

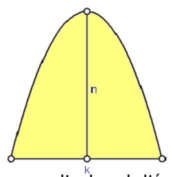
18. Dado un cono recto de generatriz a y diámetro de la base b, determinar un plano paralelo a la generatriz de modo que el segmento parabólico que resulta en la sección tenga área máxima.

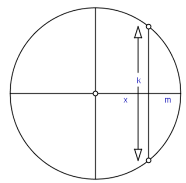




Por semejanza de triángulos: $\dfrac{a}{n}=\dfrac{b}{b-m} \quad\rightarrow\quad n=\dfrac{a}{b}\cdot(b-m)$

La sección que determina el plano paralelo es una parábola:





Donde k será la cuerda perpendicular al diámetro a una distancia m del extremo:

$$x^2+y^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad\rightarrow\quad x=\frac{b}{2}-m \quad , \quad k=2y=2\sqrt{\frac{b^2}{4}-\left(\frac{b}{2}-m\right)^2}=2\sqrt{bm-m^2}$$

Se deduce fácilmente que la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $\left(-\frac{k}{2},0\right)$, $(0,n)$, y $\left(\frac{k}{2},0\right)$ es $y=n-\frac{4n}{k^2}x^2$ (se recomienda repasar la ecuación de la parábola).

El área de esta sección es:

$$S=\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} y(x)dx=\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}\left(n-\frac{4n}{k^2}x^2\right)dx=\left[n\cdot x-\frac{4n}{k^2}\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}=$$

$$=\left(n\frac{k}{2}-\frac{4n}{k^2}\frac{k^3}{24}\right)-\left(-n\frac{k}{2}+\frac{4n}{k^2}\frac{k^3}{24}\right)=nk-\frac{nk}{3}=\frac{2}{3}nk$$

O sea:

$$S=\frac{2}{3}nk=\frac{2}{3}n\cdot 2\sqrt{bm-m^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{b}(b-m)\cdot\sqrt{bm-m^2}$$

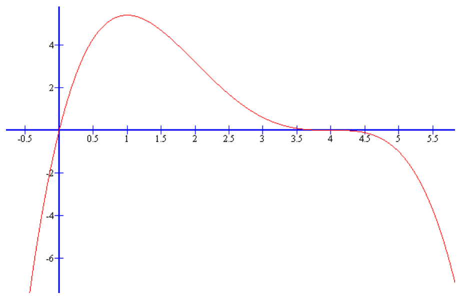
Como el área es una cantidad >0, el máximo de esta función coincidirá con el de su cuadrado, que es la función:

$$f(m)=S^2=\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot(b-m)^2\cdot(bm-m^2)=\frac{16a^2}{9b^2}\cdot m\cdot(b-m)^3$$

Que tiene por derivada:

$$f'(m)=\frac{16a^2}{9b^2}\cdot\left(1\cdot(b-m)^3+m\cdot 3(b-m)^2\cdot(-1)\right)=\frac{16a^2}{9b^2}\cdot(b-m)^2(b-4m)$$

Que se anula en: $m=b$ y $m=\frac{b}{4}$. Al ser *f(m)* una función polinómica de 4º grado con coeficiente de su término de mayor grado negativo y raíces $m=0$ simple y $m=b$ triple, su gráfica es (en la representación se ha considerado b=4):



en donde se ve claramente que el máximo se obtiene en $m=\frac{b}{4}$.