



**Taller de Talento Matemático
3º y 4º E.S.O.**

EL PROBLEMA DE JOSEFO

Antonio M. Oller Marcén

Zaragoza, 18 de enero de 2019

Tito Flavio Josefo (siglo I a.n.e.)

Yossef bar Mattityahu

Historiador.

Capturado durante la revuelta judía contra Roma.

Se salvó haciéndole la pelota a Vespasiano.

Se conservan 4 libros suyos, en griego.



EL PROBLEMA DE JOSEFO

Guerra de los judíos

Libro 3, capítulo 8, parte 7

Josefo y sus 39 compañeros están acorralados.

No quieren entregarse vivos.

Pactan un método para matarse entre ellos y que el último superviviente se suicide.

Se sientan en círculo y empezando por uno de ellos, cada uno mata al de su izquierda.

EL PROBLEMA DE JOSEFO

Guerra de los judíos

Libro 3, capítulo 8, parte 7

Josefo se quiere salvar.

Como sabía matemáticas, pensó un rato y descubrió dónde se tenía que sentar para ser el último superviviente. Así, en vez de suicidarse, se rinde y nadie se entera.

Pregunta: ¿Dónde se sentó?

Si en vez de ser 40, hubieran sido 4, ¿dónde se habría tenido que sentar?

¿Y si hubieran sido 6?

Vamos a completar esta tabla:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$								

Si en vez de ser 40, hubieran sido 4, ¿dónde se habría tenido que sentar?

¿Y si hubieran sido 6?

Vamos a completar esta tabla:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$	1	1	3	1	3	5		

Si en vez de ser 40, hubieran sido 4, ¿dónde se habría tenido que sentar?

¿Y si hubieran sido 6?

Vamos a completar esta tabla:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1

¿Para que valores de n se cumple que $S(n)=1$?

En la tabla hemos visto que:

$$n = 1, 2, 4, 8$$

¿Qué tienen en común estos números?

¿Para que valores de n se cumple que $S(n)=1$?

En la tabla hemos visto que:

$$n = 1, 2, 4, 8$$

¿Qué tienen en común estos números?

¡Son potencias de 2!

Conjetura:

Si n es una potencia de 2, entonces $S(n) = 1$.

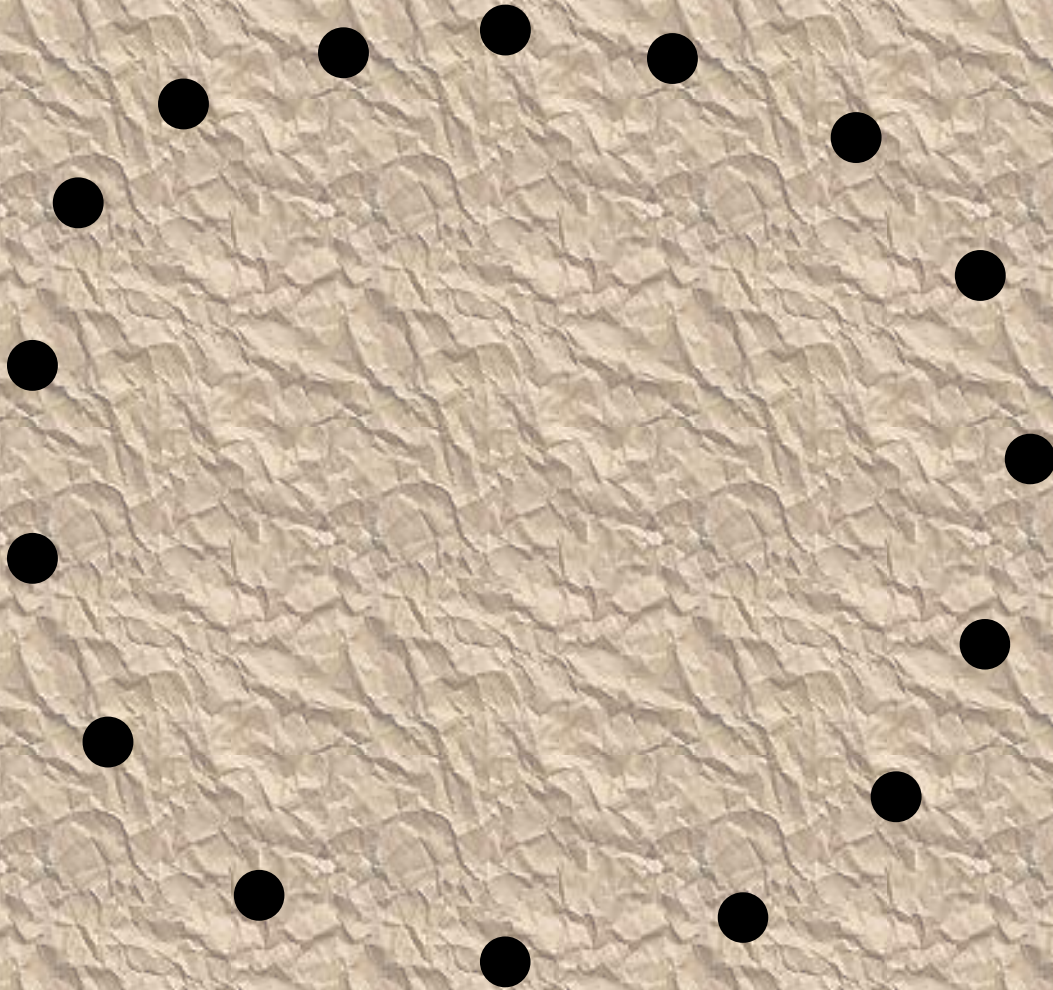
¿Es cierta?

¿Seguro?

¿Cómo podemos justificarlo?

n = 16

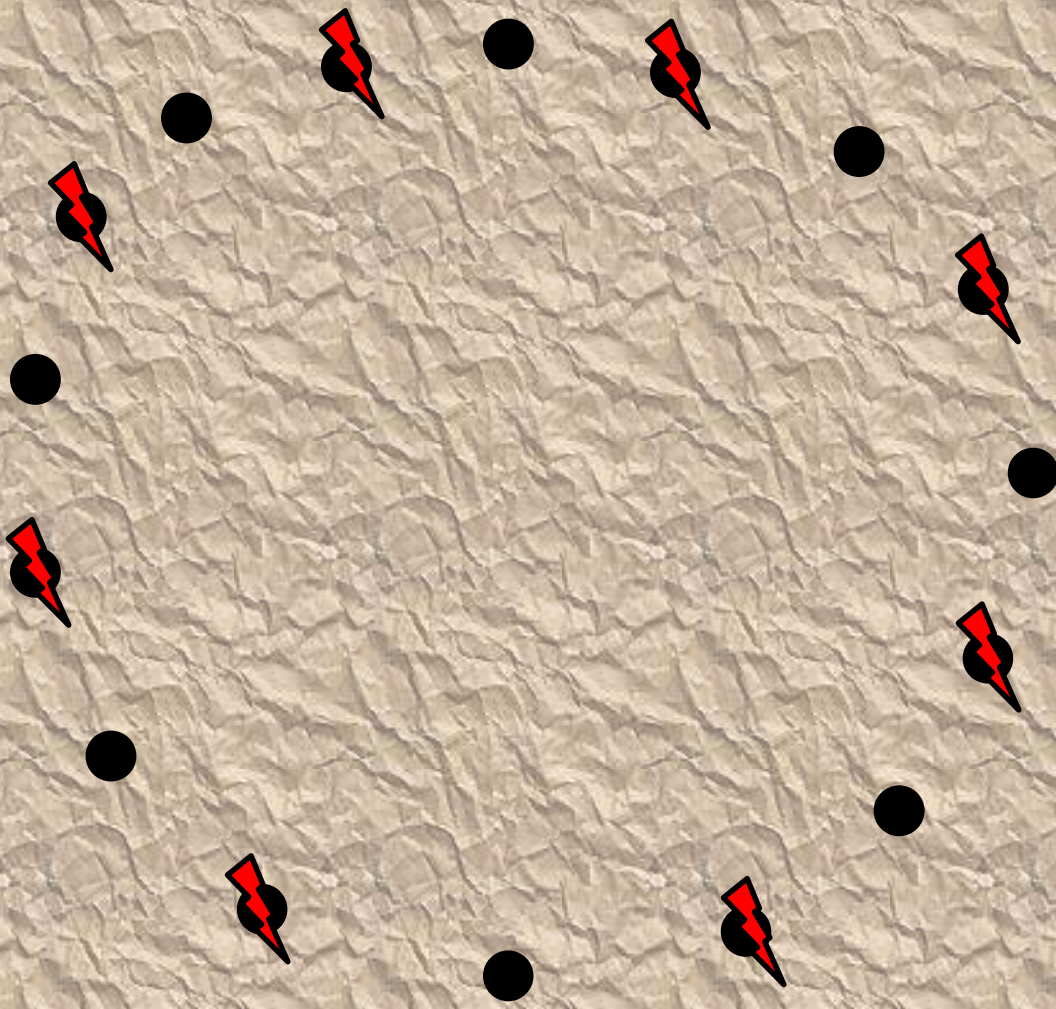
1



n = 16

n = 8

1



n = 16

n = 8

n = 4

1



n = 16

n = 8

n = 4

n = 2

1



n = 16

n = 8

n = 4

n = 2

n = 1

1



n = 16

n = 8

n = 4

n = 2

n = 1

1

$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1$$



Una curiosidad:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

¿Pasa lo mismo con el 3?

¿el 4?

etc...

Ya hemos visto que si el número de personas es una potencia de 2, para salvarse hay que sentarse el primero.

¿Qué pasa si no es una potencia de 2? Por ejemplo, ¿qué pasa si $n = 23$?

Recordar la tabla del principio:

Número de personas $\rightarrow n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Lugar en el que sentarse $\rightarrow S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1

16 < 23 < 32

$$16 < 23 < 32$$

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1

$$16 < 23 < 32$$

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



Si hay 23 personas, tenemos que sentarnos en la posición 15

$$16 < 23 < 32$$

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



Si hay 23 personas, tenemos que sentarnos en la posición 15

¿De dónde sale ese 15?

$$16 < 23 < 32$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
S(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1



Si hay 23 personas, tenemos que sentarnos en la posición 15

¿De dónde sale ese 15?

$$\begin{aligned} 23 &= 16 + 7 \\ 15 &= 2 \times 7 + 1 \end{aligned}$$

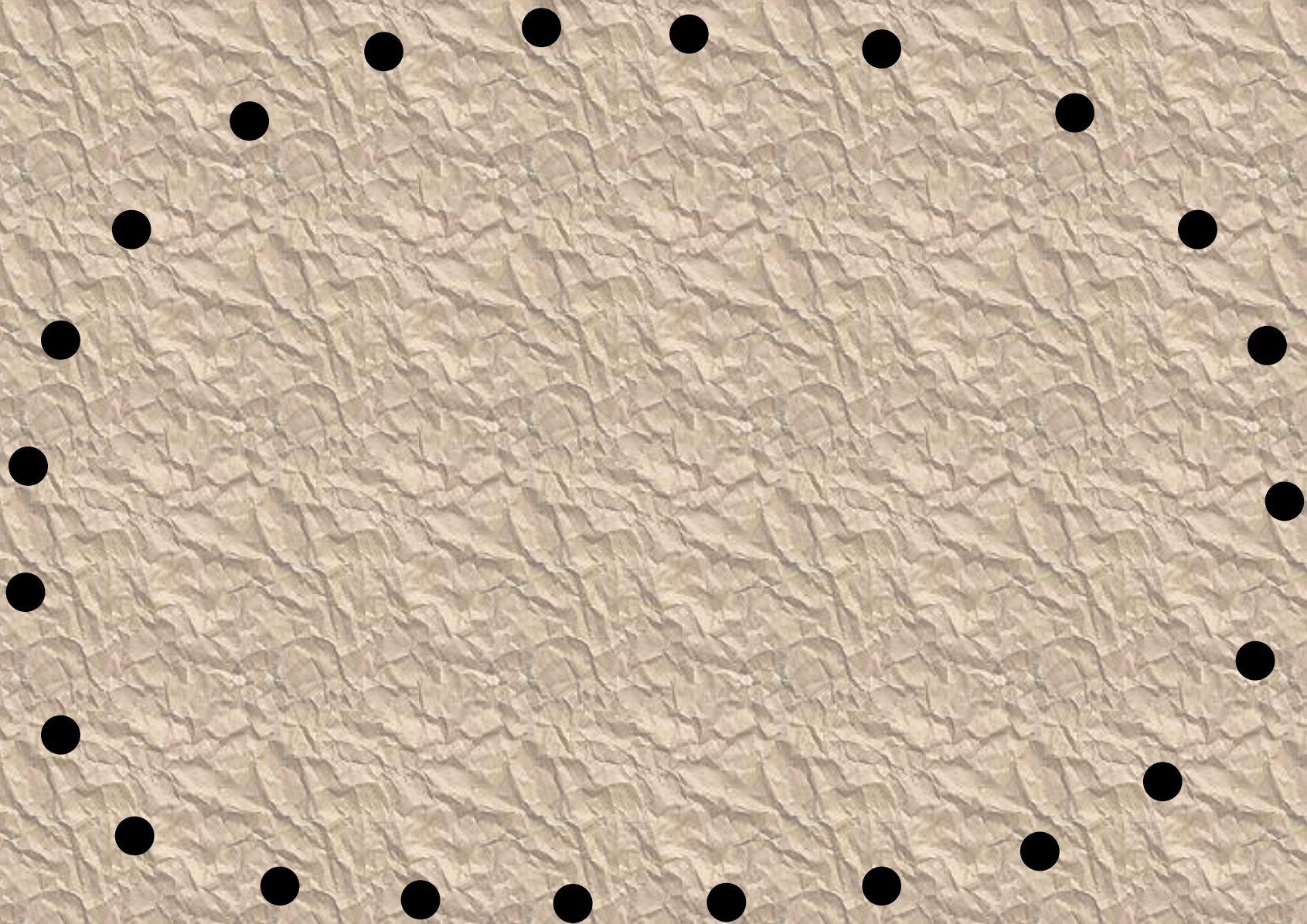
Conjetura 2:

Si $n = 2^k + a$, entonces $S(n) = 2a + 1$.

¿Cómo podemos justificarlo?

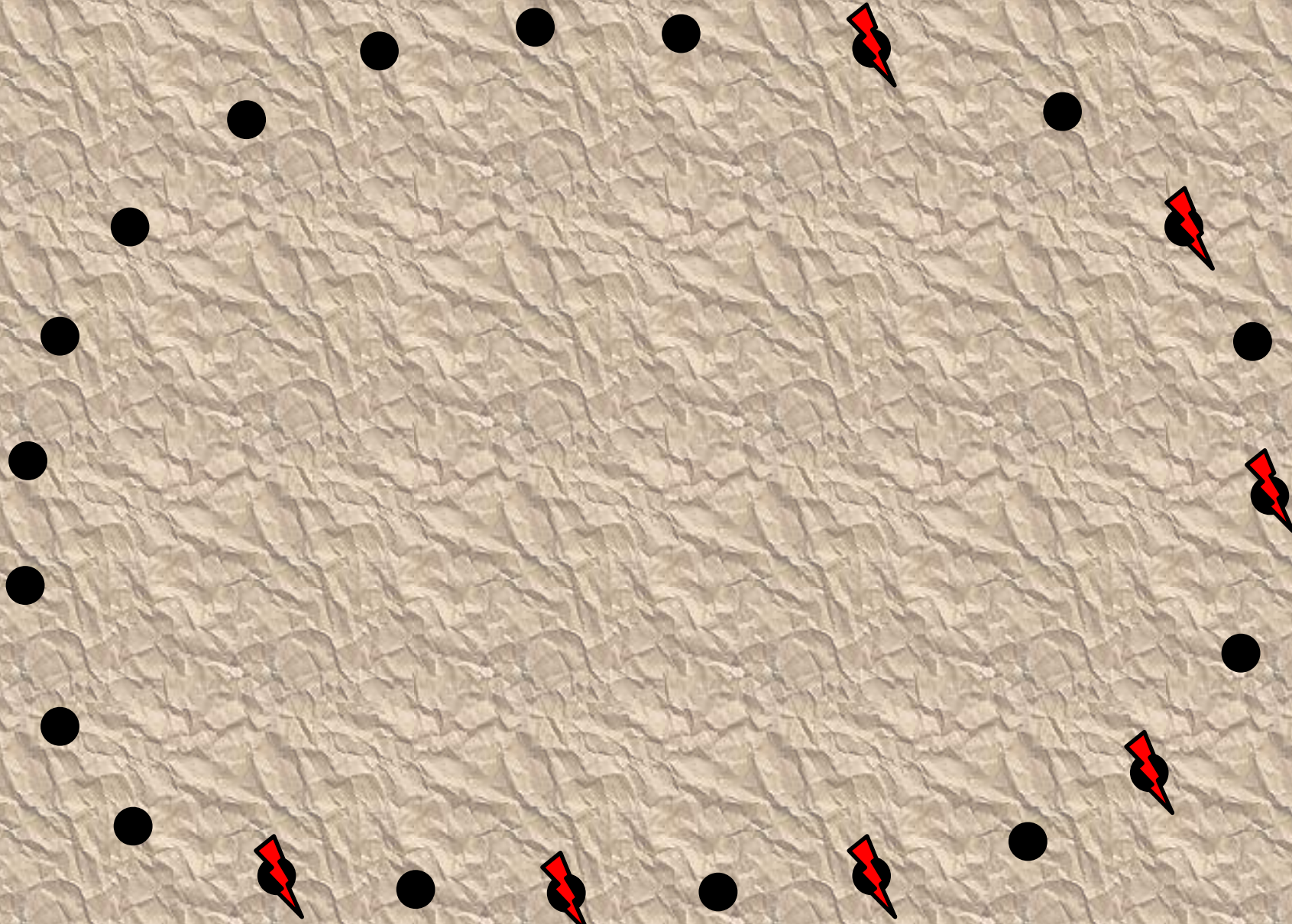
n = 23

1



n = 23 = 16 + 7

1



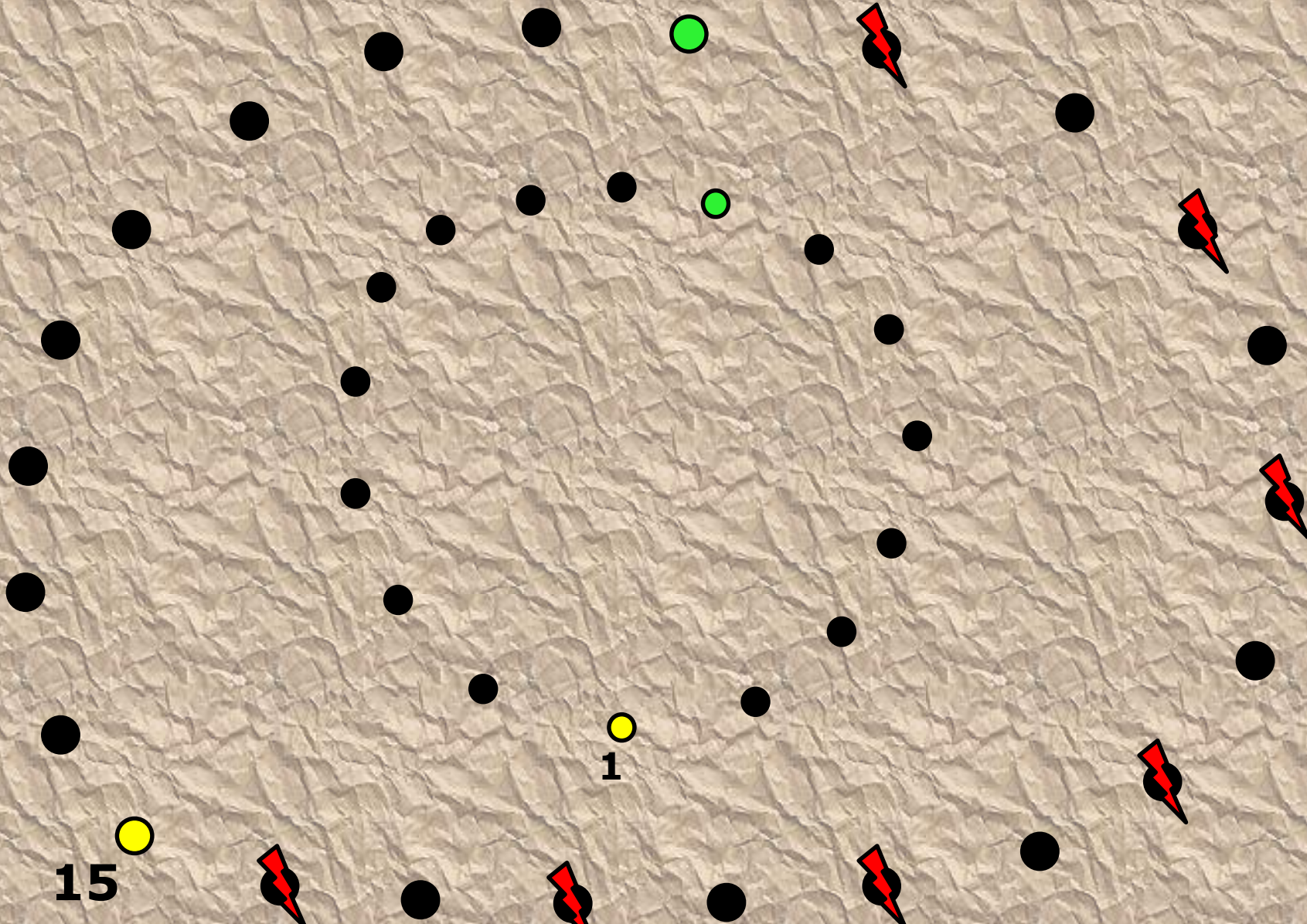
$$n = 23 = 16 + 7$$

$$2 \times 7 + 1 = 15$$

1

1

15



En el problema original $n = 40$.

Como $40 = 32 + 8$,

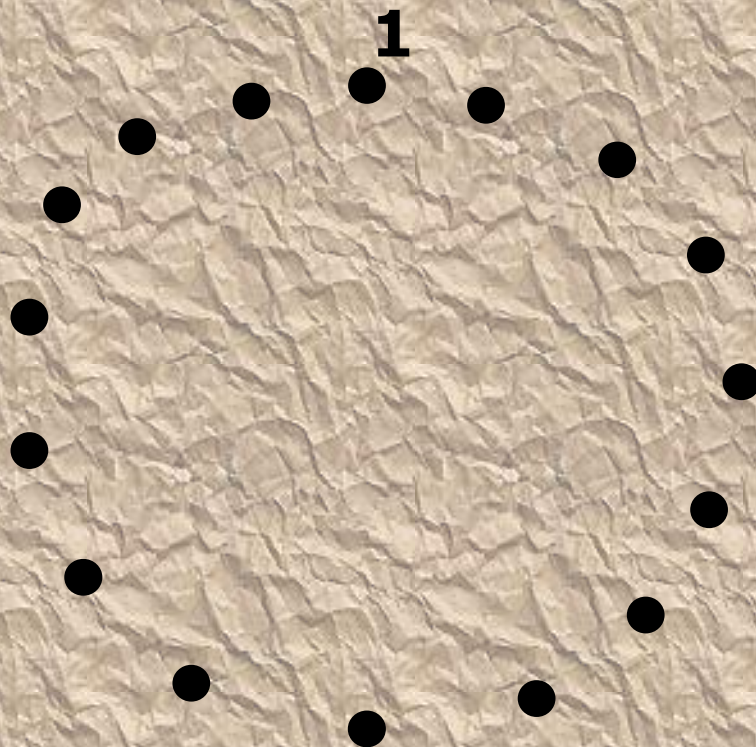
$S(40) = 17$

Por tanto, Josefo se sentó en la posición número 17, quedó el último, se entregó y se salvó.

Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

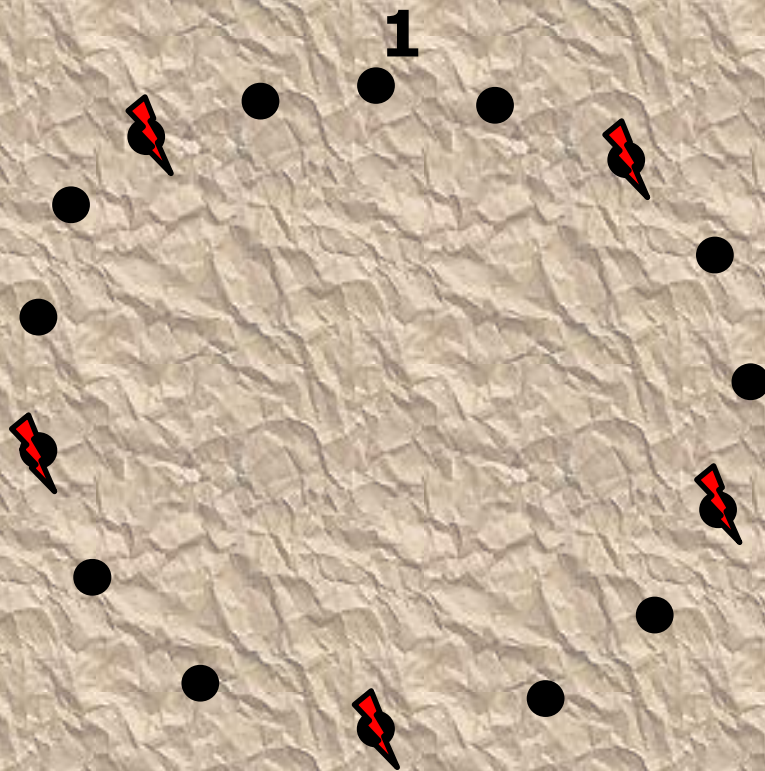
$n = 16$



Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

$n = 16$



Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

n = 16



Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

n = 16



Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

n = 16



Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

n = 16



Para que penséis por vuestra cuenta:

¿Qué pasa si en vez de matar al que tenemos a nuestra izquierda, matamos al segundo de nuestra izquierda?

¿Y si matamos al tercero de nuestra izquierda?

¿Y al cuarto?

etc., etc., etc.



**Taller de Talento Matemático
3º y 4º E.S.O.**

¡MUCHAS GRACIAS!

Antonio M. Oller Marcén

Zaragoza, 18 de enero de 2019