Preparación olímpica III
Soluciones

Rubén Blasco García

23 Noviembre 2018

Problema 1. *Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:*

$$f(n) = \begin{cases} -f(\frac{n}{2}) & si \quad n \text{ es par}, \\ \\ f(n-1)+1 & si \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostrar que (n) es múltiplo de 3 si, y solo si, n es múltiplo de 3, y hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

Solución: De la definición de f es fácil ver que $f(0) = 0, f(1) = 1$ que $f(2^a) = (-1)^a$ para todo $a \geq 0$. Tomemos $a > b \geq 0$, se tiene:

$$f(2^a + 2^b) = f(2^b(2^{a-b} + 1)) = (-1)^b[(-1)^{a-b} + 1] = (-1)^a + (-1)^b,$$

y en general si $a_k > ... > a_1 \geq 0$:

$$f(2^{a_1} + ..,2^{a_k}) = (-1)^{a_1} + ... + (-1)^{a_k}.$$

Los restos de 2^n al dividir entre 3 son 1 o 2 dependiendo de si n es par o impar. Pero como $2 \equiv -1 \mod 3$ tenemos que $2^{a_1} + ..,2^{a_k}$ y $(-1)^{a_1} + ... + (-1)^{a_k}$ tienen el mismo resto al dividir por 3. Con esto probamos la primera parte.

Para probar la segunda parte, claramente el menor número buscado se encontrará sumando las menores potencias pares de 2 hasta alcanzar 2017 sumandos:

$$2^0 + 2^2 + ... + 2^{2\times 2016},$$

progresión geométrica de razón 4 cuya suma es $\dfrac{2^{2\times 2017} - 1}{3}$.

Problema 2. *Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la siguiente ecuación funcional:*

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y,$$

cualesquiera sean x, y reales.

Solución:
Considerando $x = y = f(0)$ obtenemos $f(0) = 0$. Ahora consideramos $x = 0$ y tenemos

$$f(f(y)) = f(0) = y$$

para cualquier y real.

Si consideramos ahora $y = 0$ tenemos $f(x + f(x)) = f(2x)$ de donde se sigue que $f(f(x + f(x))) = f(f(2x))$ y por lo anterior tenemos que $x + f(x) = 2x$, es decir $f(x) = x$. Es inmediato comprobar que esta función es solución para x, y cualesquiera.

Problema 3. *Encuentra todas las aplicaciones* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *que verifican* $f(n) + f(n+1) = 2n+1$ *para cualquier entero* n *y además*

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015$$

Solución: Nótese que $f(n+1) = 2n + 1 - f(n)$, con lo que podemos hallar sucesivamente:

$$f(1) = 1 - f(0), f(2) = 3 - f(1) = 2 + f(0), f(3) = 5 - f(2) = 3 - f(0)...$$

Esto nos permite conjeturar que $f(n) = n + (-1)^n f(0)$. Vamos a probarlo por inducción, los primeros pasos ya hemos comprobado que se satisfacen, y si es cierto para n entonces:

$$f(n+1) = 2n + 1 - f(n) = 2n + 1 - n - (-1)^n f(0) = n + 1 + (-1)^{n+1} f(0).$$

Luego es cierto para todo entero positivo n. Usando inducción hacia atrás y el hecho de que $f(n) = 2n + 1 - f(n+1)$ nos permite ver que la expresión es válida para todo entero n, también si es negativo.

Nótese ahora que en $\{1, ..., 63\}$ hay exactamente un entero impar más que enteros pares. En la imagen de cada entero par aparece $f(0)$ con signo positivo y en la de los impares con signo negativo, luego:

$$2015 = \sum_{i=1}^{63} f(i) = -f(0) + \sum_{i=1}^{63} i = \frac{63 \times 64}{2} - f(0) = 2016 - f(0).$$

Luego $f(0) = 1$. Con lo que la única función que satisface las condiciones del enunciado es $f(n) = n + (-1)^n$.

Problema 4. *Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara? (Fase Local 2007)*

Solución: Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores. Puesto que cada vértice ha de estar exactamente en una cara cuadrada, debe haber $V = 4 \times 12 = 48$ vértices. (Se obtendría el mismo resultado haciendo la cuenta con los hexágonos o los octógonos). Como de cada vértice salen exactamente 3 aristas, hay $A = 3V/2 = 72$ aristas. Cada cuadrado tiene 2 diagonales, cada hexágono 9 y cada octógono $20 (d = n(n-3)/2)$, por tanto $D = 12 \times 2 + 8 \times 9 + 6 \times 20 = 216$ diagonales sobre las caras. Así, el número pedido I será igual al total de pares que se puedan formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, y restando las aristas y las diagonales sobre las caras. $I = \binom{48}{2} - A - D = 840$.

Problema 5. *Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que, al menos el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto. (Fase Local 2008)*

Solución:

Todos estos números se pueden descomponer en factores primos $2^a 3^b 5^c 7^d$, donde a, b, c, d son enteros no negativos. Si dos números de este tipo se multiplican, es decir $2^a 3^b 5^c 7^d$ y $2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'}$ se multiplican, su producto es $2^{a+a'} 3^{b+b'} 5^{c+c'} 7^{d+d'}$ y si los cuatro exponentes $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$ son pares el producto es un cuadrado perfecto. Para que esto ocurra las dos cuaternas (a, b, c, d) y (a', b', c', d') han de tener la misma paridad. Como cada número a, b, c, d puede ser par o impar, hay un total de 16 cuaternas con distinta paridad entre sí. Al tener 17 números, y por tanto 17 cuaternas, por el principio del palomar dos deben tener igual paridad y entonces su producto es un cuadrado perfecto.

Problema 6. *En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que independientemente de cuales sean los n segmentos elegidos y de como de haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color. (OME 2011)*

Solución:

Veamos en primer lugar que con $n = 2010$ no es suficiente. Diremos que un segmento es de tamaño r, si une dos vértices entre los que siguiendo el camino más corto por los lados del polígono hay otros $r - 1$ vértices. Elegimos los 2010 segmentos de tamaño mayor que 3 (De tamaño mayor que 3 hay $60 \times 67/2 = 2010$ segmentos exactamente). Para cada r entre 1 y 10 asignamos el color r a los segmentos de tamaño $3r + 1, 3r + 2, 3r + 3$ (notar que el tamaño máximo es 33). Es claro que cada vértice pertenece a 6 segmentos de cada color. Ahora probaremos que si $= 2011$ hay algún vértice que está en 7 segmentos del mismo color. En los 2011 segmentos intervienen contando repeticiones 4022 vértices, luego por el principio del palomar como $4022 > 60 \times 67$, algún vértice interviene en al menos 61 segmentos, de los cuales de nuevo por el principio del palomar al menos 7 serán del mismo color.