

Taller Talento Matemático día 2 de febrero de 2018
Paz Jiménez Seral

Problema propuesto por Jaume Pagés en La Vanguardia (5 de septiembre de 2009). (El periodista equivoca los datos, aquí lo planteamos bien)

Partiendo de dos números menores que 100 y distintos del 1, al matemático Pepe se le da a conocer su producto P y a la matemática Sara su suma S , para que traten de saber cuáles son esos dos números.

Se produce el siguiente diálogo:

- 1) Pepe: No puedo saber los números.
- 2) Sara: Ya lo sabía
- 3) Pepe: Ahora ya los sé
- 4) Sara: Ahora yo también los sé

Y yo os planteo a vosotros que encontréis cuales eran esos dos números.

Trabajo para encontrar la solución.

Hay que tratar de aclarar qué piensan Pepe y Sara, cómo razonan, hasta dónde pueden llegar en cada momento con los datos que tienen.

Primera parte. En el caso de que tuvieses que buscar dos números ¿qué dato prefieres, la suma o el producto? ¿Por qué?

Con la suma nunca puedes saber con seguridad cuales son, salvo que la suma sea 4 o 5.

Con el producto hay veces que sí puedes saber los números, por ejemplo si el producto es 6 o si es 14,

Prueba con 1763 y con 3526 y con 212 y con 369.

¿Cuándo exactamente puedes saber los dos números a partir del producto?

Depende de cómo sea su descomposición como producto de primos. Puedes saber los dos números exactamente en los siguientes casos:

- Cuando es un producto de dos primos o el cubo de un primo
- Cuando sale en la descomposición un primo mayor que 50.
- Cuando el producto del primo mayor por el primo menor es mayor que 100. (el caso anterior es un caso particular de este)

Vamos a decir que **estos valores de P son los fáciles**. En los casos que no es posible saber con seguridad cuales son los dos factores, es decir números P que factorizan de más de una manera como producto de dos números menores que 100, a esos valores de P les vamos a llamar difíciles.

Pepe: No puedo saber los números.

Ya sabemos que P es difícil luego es un producto de al menos tres primos (que pueden ser dos iguales), y el producto del mayor por el menor es menor que 100.

Para encontrar los primos menores que 50 podemos usar la criba de Eratóstenes y estos primos son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53

Sara: Ya lo sabía

Sara es matemática y sabe qué valores de P son fáciles y cuales difíciles.

Con 2) sabemos que todas las posibles formas de descomponer S en dos sumandos darían productos difíciles. No hay ningún modo de descomponer S en dos sumandos cuyo producto sea fácil porque si lo hubiese Sara no sabría si Pepe tenía un P fácil o difícil.

Vamos a llamar **suma posible** a un S tal que no puede ser suma de dos números cuyo producto es fácil. Por ejemplo $S=19$ no es posible porque $19=2+17$ y $2 \cdot 17$ es fácil.

Si S hubiese sido 19, Sara pensaría en la posibilidad de 2 y 17 y en este caso Pepe hubiese sabido la solución, si Sara sabe que Pepe no sabe la solución $S=19$ no es posible.

$S=23$ es posible porque $23=2+21=3+20=4+19=5+18=6+17=7+16=...$ los posibles productos $2 \cdot 21, 3 \cdot 20, 4 \cdot 19,$ son difíciles porque en todos hay al menos tres factores que podemos agrupar de más de una forma. Como es impar no es suma de dos primos impares y tampoco es un primo +2.

$S=11$ es posible $11=2+9=3+8=4+7=5+6$ y $2 \cdot 9, 3 \cdot 8, 4 \cdot 7, 5 \cdot 6$ son todos difíciles.

En particular sabemos que si S es suma de dos primos, no es posible porque su producto sería fácil.

Por cierto que la conjetura de Goldbach (1690-1769) dice que todo número par es suma de dos primos, se puede comprobar que es cierta para casos menores de 200 que nos ocupan.

Así que si S es posible no puede ser par, ni tampoco primo más dos.

Si S es posible es menor que 55, porque a partir de aquí podría ser 53(primo) mas algo, y el producto de 53 por "algo" es fácil.

(Tenemos de paso que en la descomposición de P en primos está el 2 porque la suma de dos impares es par)

Concretando las **sumas posibles** son exactamente las siguientes

11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53

En vez de estudiarlas una por una también podemos pensar que S impar y menor de 55, si no es posible se puede descomponer en dos sumandos con producto fácil. Cómo uno es par y el otro impar, el tal producto fácil no puede ser el cubo de un primo, luego es el producto de dos primos, luego los dos sumandos sería primos y el uno par, luego es 2 más un primo. Así son sumas posibles todos los impares menores de 55 salvo los que son primo más 2.

Pepe: Ahora ya los sé

Pepe tiene varias formas de agrupar sus primos para formar los dos números pero en 3) dice que ahora ya sabe cual es la solución. Así que de todas las formas de agrupar los factores de P para formar dos números menores que 100, sólo una da una suma de las que ha podido ver Sara, una de las posibles.

Diremos que un **P es válido si verifica la condición anterior: De todas las formas posibles de agrupar los factores de P para formar dos números, sólo una pareja da una suma posible.** Obviamente el P que tiene Pepe es válido.

Ejemplos de P válidos. Una potencia de 2 por primo o es válido o la suma de la potencia por el primo no es posible, por ejemplo 4.7 es difícil pero es válido. Todos los pares de factores suman par, salvo 4, 7 que suma 11 que es posible.

8.7 no es válido porque $8+7$ no es posible y $4+14$ y $2+28$ tampoco (estas últimas son pares)

Sara: Ahora yo también los sé

Sara ya sabe que el P de Pepe es válido y como ahora ella sabe también la solución, es que de todas las posibles formas de descomponer S en dos sumandos solo hay una tal que el producto de los sumandos es válido.

Estudio de las sumas posibles, recordemos que P es válido si es potencia de 2 por primo que tengan suma posible.

11 El producto 4.7 es válido, 8.3 también es válido, descarto

$17=2+15=3+14=4+13=5+12=6+11=7+10=8+9$

2.15=30 no válido porque 2+15 es posible y 6+5 también es posible

3.14=42 no válido porque 3+14 es posible y 21+2 también es posible

4.13 válido, (potencia de dos por primo),

5.12=60 no válido porque 5+12 es posible y 20+3 también es posible

6.11=66 no válido porque 6+11 es posible y 2+33 es posible

7.10=70 no válido porque 7+10 es posible y 35+2 es posible

8.9=72 no válido porque 8+9 es posible y 24+3 es posible

Este caso $S=17$ con los números 4 y 13 no lo podemos descartar. Volveremos luego a repasarlo.

Podemos descartar las sumas que a la vez son primo + 4 y también primo +8. Miramos los primos que difieren 4. y descartamos el mayor mas 4. Así descartamos, 11,15,21,45 (ya estaban todas descartadas)

Primos 11, 17, 23,27,29,35,37,41,47, 51, 53

Análogamente si la suma es primo + 4 y también primo +16 se descarta, luego miramos primos que difieren 12. Así descartamos $17+4=21$, 23,33,35,45,47,57,63,75,105,113,

Con 4 y 32 la diferencia es 28, Así descartamos 35,45,51,63,75,93,111

Podemos seguir buscando modos de descartar pero mejor seguir caso por caso.

23 4.19 válido, 16.7 valido, descarto.

27 4. 23 válido, 8.19 válido, descarto.

29 16. 13 válido. Análisis 2. 27 y veo 2+27 posible, 6+9 no posible y 18+3 no posible, luego 2.27 es válido y descarto

35 4. 31 válido, 16. 19 válido, descarto.

37=8+29, 8. 29 válido, 32. 5 válido, descarto.

41=4+37, 4. 37 válido. Análisis 32. 9 y veo 32+9 es posible, 96+3 no posible por ser mayor de 54, luego 32.9 es válido y descarto.

47=4+43, 4. 43 válido. 16. 31 válido, descarto.

53=4+49. Análisis 4. 49 y tenemos 4+49 es posible, 28+7 posible luego 4.49 no válido

Análisis 2. 51=2. 3.17, 6+17 posible, 2+51 posible, luego 2. 51 no válido

Análisis 6. 47=2. 3. 47, 6+47 es la única suma posible, las otras serían mayores de 54, luego 6.47 es válido

Análisis 16. 37, 16+37 es la única suma posible, además las otras serían mayores de 54, luego 16. 37 es válido. Con dos productos válidos descartamos 53.

Así la única solución posible es 13 y 4.

Repasamos que efectivamente es correcta esta solución, números 13 y 4
Pepe tiene el producto que es $P=52=13 \cdot 4$ y Sara sabe la suma $S=17$

Pepe dice “no puedo saber la solución porque puede ser 26 y 2 ó 13 y 4”

Sara dice “ya lo sabía porque puede ser 2 y 15, 3 y 14, 4 y 13, 5 y 12, 6 y 11, 7 y 10, 8 y 9. y en ningún caso es suma de primos, todos los posibles productos serían difíciles.

Pepe dice ahora ya lo sé pues sólo 13 y 4 suman impar. Si la solución fuese 26 y 2, S sería 28 y Sara no estaría segura de que al principio no sabía los números porque con suma 28, los números podrían haber sido 17 y 11 cuyo producto hubiese sido fácil

El único P que es válido es 4.13 Así que S contesta: Yo también lo sé.

Y si quieres pensar más:

Razona que efectivamente el periodista se equivoca en su enunciado sabiendo que el periodista intercambió en el diálogo a Pepe y Sara. Empezó Sara diciendo “No puedo saber los números” etc

Estudia el caso de que los números puedan ser mayores de 100, hasta qué número podemos poner para tener solución única.

Estudia que número podemos poner menor que 100, para que tenga la misma gracia el problema y haya menos casos.

Estudia qué pasa si permitimos que uno de los números sea 1.