Preparación Olímpica III: Geometría

Glenier Lázaro Bello Burguet
24 de noviembre de 2017

Problema 1. (Teorema de Stewart) Sea AX una ceviana del triángulo ABC de longitud p. Sean m y n las longitudes de los segmentos BX y XC, respectivamente. Probar que

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Problema 2. Sea ABC un triángulo y AA' una mediana. Halla la longitud de AA' en términos de a, b, c.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y AL una bisectriz. Probar que

$$AL^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right].$$

Problema 4. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro de un triángulo ABC, respectivamente. Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Probar que

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Problema 5. (Fórmula de Euler) Sean O e I el circuncentro y el incentro de un triángulo ABC, respectivamente. Sean R y r los radios de la circunferencia circunscrita y la circunferencia inscrita al triángulo ABS, respectivamente. Probar que

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

(Notar que, en particular, $R \geq 2r$.)

Problema 6. Sea AB un segmento fijo y sea M un punto en él. Al mismo lado de AB construimos los cuadrados $AMCD$ y $BMFE$. Las circunferencias circunscritas a los dos cuadrados, cuyos centros son P y Q, se intersecan en M y en otro punto N.

(a) Probar que las rectas FA y BC se cortan en N.

(b) Probar que todas las rectas MN pasan por un mismo punto S, independientemente de la elección de M.

(c) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todos los segmentos PQ, cuando M recorre el segmento AB.

EXTRA

Problema 7. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia Γ. El punto D está en el arco BC que no contiene a A. El punto E es el simétrico a B con respecto a CD. Probar que A, D, E son colineales.

Problema 8. Se considera el triángulo ABC con $\angle BAC = 45^o$ y $\angle ACB = 30^o$. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que $\angle AMB = 45^o$ y que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

Problema 9. Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera la cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC. Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la circunferencia.

Problema 10. Sean a, b y c los lados de un triángulo de área (ABC). Probar que

$$4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Problema 11. En el triángulo $\triangle ABC$, $AB < AC$ y sea O su circuncentro. La recta tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo que pasa A corta a la recta BC en D. Las rectas perpendiculares a BC en B y en C cortan a las mediatrices de los lados AB y AC en E y en F, respectivamente. Probar que D, E y F están alineados.

Problema 12. ABC es un triángulo isósceles con $AB{=}AC$. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y AC en C. Denotemos por a, b y c a las distancias de P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que $a^2 = bc$.

Problema 13. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc.$$

Problema 14. En un triángulo acutángulo ABC, con $AB \neq AC$, sea V la intersección de la bisectriz de A con BC y sea D el pie de la altura desde A a BC. Si E y F son las intersecciones de la circunferencia circunscrita a AVD con CA y AB, respectivamente, mostrar que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Problema 15. Una circunferencia Γ_2 es tangente interiormente a la circunferencia Γ_1 circunscrita al triángulo PAB en P y al lado AB en C. Sean E y F la intersección de Γ_2 con los lados PA y PB, respectivamente. Sea D el punto de intersección de EF con PC. Las rectas PD y AD intersecan de nuevo a Γ_1 en G y H, respectivamente. Probar que F, G, H están alineados.